~~02~~-10-19

OEM dans les diélectriques
(LP n° 28)

①

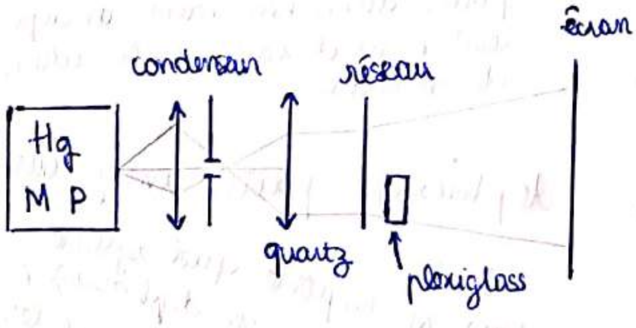
Niveau : licence

PR : EM dans les milieux diélectriques ; modèle de l'électron élastiquement lié

Biblio : électromagnétisme 2, Faraux & Renault, DUNOD + physique PC/PC*, ellipses
cours P. Puzo : users.lal.in2p3/puzo/em
cours R. Grandin : ipgp.fr chapitre 4 - milieux
cours UPMC : edu.upmc chap. 6 . électromagnétisme des milieux

Intro : Lorsqu'elles rencontrent un milieu différent du vide, les ondes EM sont modifiées par l'interaction entre les champs électrique et magnétique propre à l'onde et les champs produits par la réaction du milieu.
Cette réaction est induite par la mise en mouvement des charges emprisonnées dans le milieu. Ce mouvement s'effectue en réponse au champ électrique (polarisation) ou par la modification des dipôles magnétiques présents à l'intérieur du milieu sous l'effet du champ magnétique (aimantation).
Dans les milieux conducteurs, des charges libres sont susceptibles de se mouvoir dans toute la masse du matériau ; il en résulte l'annulation du champ E interne
Dans les milieux isolants et neutres un courant de charge libres ne peut exister. Le champ $\vec{E}$ dans de tels milieux n'est pas obligatoirement nul. Ce sont les milieux diélectriques du grec "dia" = à travers.

Manip introductive




MP ou HP → UV
~~UV~~ → PB (Hg)

réseau par réflexion

on néglige effet de $\vec{B}$ car force de Lorentz $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
si $e^-$ non relativiste

Scanné avec CamScanner

# I - OEM dans un diélectrique : généralités

## 1) Équations de Maxwell dans un diélectrique

(H) isolant : $\rho_{libre} = 0$ ; $\vec{j}_{libre} = \vec{0}$

non magnétique : $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{div}(\vec{D}) = 0 \\ \mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\mathrm{rot}}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{gathered}}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

que vaut $\vec{P}$ ?

(H) lhi

* cas statique : $\vec{E} = \vec{cst}$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ $\Rightarrow$ $\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi_e)}_{\varepsilon_r}}_{\varepsilon} \vec{E}$

* cas dynamique : $\vec{E} = \vec{E_0} \cos(\omega t)$

$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 (\chi'(\omega)\cos(\omega t) + \chi''(\omega)\sin(\omega t))\vec{E_0}$

terme en phase $\propto \chi'$

terme en quadrature $\propto \chi''$

explication : si les variations de $\vec{E}$ sont rapides, la polarisation induite ne suivra ces variations qu'avec un certain retard, la polarisation nécessitant un déplacement $e^-$ ou d'ions, ou la rotation de molécules.

$\vec{D}(t) = (\varepsilon' \cos(\omega t) + \varepsilon'' \sin(\omega t))\vec{E_0}$

$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \chi'(\omega)]$

$\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0 \chi''(\omega)$

passage $\mathbb{R}$/complexe pas évident PFD explique ce passage

déphasage : partie imaginaire

dans n'importe quel système où il y a un déphasage, il y a des pertes

que valent $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$ ?

modèle de l'$e^-$ élastiquement lié (modèle d'oscillateur amorti) : polarisabilité complexe pour 1 atome :

$\alpha(\omega) = \dfrac{e^2}{\varepsilon_0 m} \times \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \underbrace{i\gamma\omega}_{\text{déphasage}}}$ $[L^3]$

$\omega_0 \rightarrow$ "pulsation de résonance"

pertes

$\rightarrow$ loin de résonance : $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ $\rightarrow \alpha(\omega) \simeq \dfrac{e^2}{\varepsilon_0 m} \times \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$

de la résonance : $\omega \ll \omega_0 \rightarrow \alpha(\omega) \simeq$ polarisabilité statique

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \alpha(\omega) \leq 0$ : inertie des $e^-$ prépondérante et opposition de phase.

proche de résonance : $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{R}e(\alpha(\omega)) = \alpha'(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \times \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\mathcal{I}m(\alpha(\omega)) = \alpha''(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \times \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma\omega^2}$$

$\frac{|\omega_0 - \omega|}{\omega_0} \ll 1$ et $(\omega_0^2 - \omega^2) \simeq (\omega_0 - \omega)\, 2\omega_0$

$$\alpha'(\omega) \simeq \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \times \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2/4}$$

$$\alpha''(\omega) \simeq \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \times \frac{\gamma/2}{(\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2/4}$$

---

dans un milieu de densité d'atomes $N$ : $\chi(\omega) = N\alpha(\omega)$ — relation de Clausius Mossoti

$\Rightarrow \varepsilon_r(\omega)$

↳ montrer par diapo.

<u>commentaire</u> : partie $\mathcal{R}e$ + partie $\mathcal{I}m$

loin de la résonnance $\varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{R}$

$\omega \ll \omega_0 \rightarrow$ retrouver la valeur statique

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \varepsilon_r(\omega) < 0$ : inertie des $e^-$ en opposition de phase

proche résonance : $\varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{C}$

partie $\mathcal{I}m \leftrightarrow$ absorption par le milieu

## 2) Onde monochromatique dans un diélectrique lhi

$\vec{E} = \vec{E_\omega}\, e^{-i\omega t}$  $\vec{B} = \vec{B_\omega}\, e^{-i\omega t}$  $\vec{D} = \vec{D_\omega} e^{-i\omega t} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$

si milieu non isotrope $\varepsilon(\omega)$ est une matrice

Réécriture des équations de Maxwell:

$$\text{div}(\vec{E_\omega}) = 0$$
$$\text{div}(\vec{B_\omega}) = 0$$
$$\vec{\text{rot}}(\vec{E_\omega}) - i\omega \vec{B_\omega} = \vec{0} \quad (*)$$
$$\vec{\text{rot}}(\vec{B_\omega}) + \mu_0 i\omega\, \varepsilon(\omega)\vec{E_\omega} = \vec{0}$$

rot (*) $\Rightarrow$

$$\vec{0} = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E_\omega})) - \Delta\vec{E_\omega} - i\omega\, \vec{\text{rot}}(\vec{B_\omega})$$
$$\vec{0} = -\Delta\vec{E_\omega} - i\omega(i\omega\,\varepsilon\mu_0\vec{E_\omega})$$
$$\vec{0} = \Delta\vec{E_\omega} + \omega^2\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{E_\omega}$$

$\vec{E_\omega}$ et $\vec{B_\omega}$ suivent l' ~~équation de d'Alembert~~ : $\Delta\vec{E_\omega} + \omega^2\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{E_\omega} = \vec{0}$ notamment

Faux

équation d'onde

## 3) OPP monochromatique dans lhi

$$\vec{k} = k\vec{u}$$
$$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B} = \vec{B_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

équations de Maxwell: $\left.\begin{array}{l}\vec{k}\cdot\vec{E} = 0\\ \vec{k}\cdot\vec{B} = 0\end{array}\right\}$ commentaire : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses comme ds le vide

$\left.\begin{array}{l}\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}\\ \vec{k}\wedge\vec{B} = -\omega\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{E}\end{array}\right\}$ commentaire : $\vec{u}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct comme ds le vide

Relation de dispersion : $\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{E}$

$$-\omega\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{E} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{B}) = \frac{1}{\omega}k^2\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{E})$$

$$-\omega\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{E} = \frac{1}{\omega}k^2\left[\cancel{(\vec{u}\cdot\vec{E})}\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{E}\right]$$

$$-\omega^2\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

$$\Rightarrow k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon(\omega)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C^2} \varepsilon_r(\omega)$$



plus développer le vecteur de poynting ou ne pas le faire

① $\varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{R}^+$ :

$k^2 \geq 0$ , OPP sans atténuation

$v_\varphi = \frac{c}{k(\omega)}$ → dispersion

analogie avec optique : $n = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$ indice

$$\vec{k} = n \vec{k}_0$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \langle \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2} cn \varepsilon_0 E_0^2 \vec{u}$$

② $\varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{R}^-$ : $k^2 \leq 0$

pas pertinent

$$\vec{k}(\omega) = \pm i \vec{k}''(\omega)$$

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{\pm \vec{k}''.\vec{r}} e^{-i\omega t}$$ → onde evanescente

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} cn \varepsilon_0 E_0 e^{-2\vec{k}''.\vec{r}} \vec{u}.$$

③ $\varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{C}$ :

$$\vec{k}(\omega) = \vec{k}'(\omega) + i\vec{k}''(\omega)$$

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{-\vec{k}''.\vec{r}} e^{i(\vec{k}'.\vec{r} - \omega t)}$$

$$\varepsilon_r(\omega) = [n'(\omega) + in''(\omega)]^2$$

$n'$ : indice de réfraction

$n''$ : indice d'extinction

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} cn' \varepsilon_0 E_0^2 e^{-2n''\frac{\omega}{c}} \vec{u}$$

## II - Lien avec l'optique

### 1) Indice optique : milieu transparent, isotrope et non-absorbant

Loi de Cauchy :

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\chi = N\alpha$$

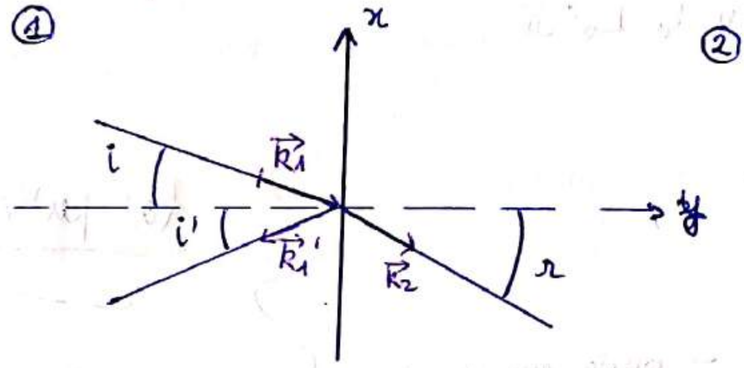
$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$n^2 = \varepsilon_r$$

DL car $\left|\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right| \ll 1$ $\quad n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$

DL en 0

### 2) Réflexion et réfraction d'une OPEM monochromatique




Les relations de passage s'expriment ttes sous la forme :

$$a_1 e^{i(\vec{k_1}\cdot\vec{r} - \omega_1 t)} + a_1' e^{i(\vec{k_1}'\cdot\vec{r} - \omega_1' t)} = a_2 e^{i(\vec{k_2}\cdot\vec{r} - \omega_2 t)}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_1' e^{i((\vec{k_1}' - \vec{k_1})\cdot\vec{r} - (\omega_1' - \omega_1)t)} = a_2 e^{i((\vec{k_2} - \vec{k_1})\cdot\vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t)}$$

$\forall t$ et pour tout $\vec{r} \in$ interface

exponentielles linéairement indépendantes : $\omega_1 = \omega_1' = \omega_2$

$k_{1x}' = k_{1x} \Leftrightarrow n k_0 \sin(i) = -n k_0 \sin(i') \Rightarrow -i = i'$

$k_{2x} = k_{1x} \Leftrightarrow n_2 k_0 \sin(r) = n_1 k_0 \sin(i) \Rightarrow n_2 \sin(r) = n_1 \sin(i)$

### 3) Coefficients de réflexion et de transmission en incidence normale

Relations de passage : $\vec{E_{T_2}} - \vec{E_{T_1}} = \vec{0}$ $\qquad \vec{B_2} - \vec{B_1} = \vec{0}$

$$\varepsilon_{r2} \vec{E_{N2}} = \varepsilon_{r1} \vec{E_{N1}}$$

...dence normale donc pas de composante normale de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$

...omme les milieux sont isotropes, les directions de $\vec{E_T}$ et $\vec{B_T}$ sont conservées

$\vec{E_r} = r\,\vec{E_i}$

$\vec{E_{t_r}} = t\,\vec{E_i}$

et la continuité des composantes tangentielles donne

$\vec{E_i} + r\,\vec{E_i} = t\,\vec{E_i} \iff \boxed{1 + r = t}$

à l'aide de M-F : on a : $\vec{B_i} = \dfrac{\vec{k_i} \wedge \vec{E_i}}{\omega} = \dfrac{n_1}{c} E_0\, e^{i\omega(t - \frac{n_1}{c}x)}\,\vec{e_z}$

$$\vec{B_r} = -r\frac{n_1}{c} E_0\, e^{i\omega(t + \frac{n_1}{c}x)}\,\vec{e_z}$$

$$\vec{B_t} = t\,\frac{n_2}{c} E_0\, e^{i\omega(t - \frac{n_2}{c}x)}\,\vec{e_z}$$

la continuité du champ impose en $z=0$ :

$\vec{B_i}(z=0) + \vec{B_r}(z=0) = \vec{B_t}(z=0)$ d'où $1 - r = \dfrac{n_1}{n_2}\,t$

d'où $r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$

Rq : on remarque que la réflexion d'un milieu ⊖ réfringent sur un milieu ⊕ réfringent ($n_1 < n_2$) s'accompagne d'un changement de signe qui traduit un déphasage de $\pi$.

en énergie : $R = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$

$T = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$

Rq : le calcul aurait pu s'effectuer de la même façon pour des indices complexes

AN : interface air-verre : $n_1 \simeq 1$ ; $n_2 = 1,5$

facteur de transmission énergétique ~ 92%

dans les systèmes optiques comportant un grd nombre de lentilles l'atténuation peut être importante et les faisceaux réfléchis former des images parasites

on traite alors les surfaces optiques par des revêtements anti-reflets qui sont en fait des couches minces superposées de diélectriques d'épaisseurs et d'indices soigneusement calculés et contrôlés.