Facteur de qualité. Cas du RLC

- $e_g(t) = e_m \cos(\omega t) = L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{q}{C} = L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C}$

soit $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \dfrac{e_m}{L}\cos(\omega t)$

où $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ soit $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

- $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2(t)}{C} + \dfrac{1}{2}Li^2(t)$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2(t)}{C} + \dfrac{1}{2}L\left(\dfrac{dq(t)}{dt}\right)^2$

$q(t) = q_m\cos(\omega t + \varphi)$ en régime forcé

$\underline{q_m} = \dfrac{e_m/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}} = q_m e^{j\varphi}$ en complexe

donc $\mathcal{E}(t) = \dfrac{1}{2C}q_m^2\cos^2(\ ) + \dfrac{1}{2}L\omega^2 q_m^2 \sin^2(\ )$

$$<\mathcal{E}(t)>_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \underbrace{\frac{q_m^2}{4C}}_{= \frac{1}{4}L\omega_0^2 q_m^2} + \frac{L\omega^2 q_m^2}{4} = \frac{1}{4}L(\omega_0^2 + \omega^2)\, q_m^2$$

En particulier, à la résonance, $<\mathcal{E}(t)>_{T_0} = \dfrac{1}{2}L\omega_0^2 q_m^2(\omega_0)$

- $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ soit en complexe $\underline{i} = j\omega \underline{q_m} e^{j\omega t}$

$= \omega \underline{q_m} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

$P(t) = e_g(t)\, i(t) = e_m\cos(\omega t)\, \omega q_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi)$

$= e_m\cos(\omega t)\, i_m\cos(\omega t + \psi)$ où $i_m = \omega q_m$ et

$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$

Donc $P_g(t) = e_m \cos(\omega t)\, i_m \left(\cos(\omega t)\cos\psi - \sin(\omega t)\sin\psi\right)$

En moyenne $\langle P_g(t)\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{e_m i_m}{2}\cos\psi = -\frac{e_m i_m}{2}\sin\varphi$

où $\sin\varphi = -\dfrac{\omega_0/Q\,.\,\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}}}$

$\varphi = -\arg\left(\omega_0^2-\omega^2+j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}\right)$

Or $q_m = \dfrac{e_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}}$ donc $\langle P_g(t)\rangle_T = -\frac{1}{2}e_m\,\omega\, q_m \sin\varphi$

ie $\langle P_g(t)\rangle_T = \dfrac{1}{2}e_m\,\omega^2 . \dfrac{e_m}{L}.\dfrac{\omega_0}{Q}.\dfrac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{e_m^2}{L}.\frac{\frac{\omega_0}{Q}.\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

L'énergie fournie pendant T s'écrit donc en moyenne

$$\langle \mathcal{E}_g(t)\rangle_T = \langle P_g(t)\rangle_T . T = \pi\frac{e_m^2}{L}\frac{\frac{\omega_0}{Q}.\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

$$\equiv \pi L\frac{\omega_0}{Q}q_m^2\,\omega$$

En particulier, à la résonance, $\langle \mathcal{E}_g(t)\rangle_{T_0} = \pi L\dfrac{\omega_0^2}{Q}q_m^2(\omega_0)$

- On en déduit la relation :

$$\frac{\langle \mathcal{E}(t)\rangle_{T_0}}{\langle \mathcal{E}_g(t)\rangle_{T_0}} = \frac{Q}{2\pi}$$

Ainsi, à la Résonance, l'énergie emmagasinée par l'oscillateur RLC est $\frac{Q}{2\pi}$ fois supérieur, à l'énergie fournie par l'excitateur, la source, égale à l'énergie dissipée par effet Joule dans la Résistance.