Pascal
Pahlzza
Isabelle Cantat

Cours φ ~~Stat~~ Relativité

Postulat 1 : $\exists$ ensemble de ref euclidien euclidens tous en translation rectiligne uniforme ds lesquels les phénomènes se déroulent de manière identique.

Postulat 2 : Vitesse limite universelle c dans chaque référentiel (Ref = objet solide donc ne peut pas non plus aller vitesse > c)

Chapitre 1 : Cinématique

1) Postulats

2) Transformation de Lorentz

On se donne 2 référentiels inertiels
$\mathcal{R}(O, x, y, z, t)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z', t')$

tels que $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V_e \cdot \vec{e_x}$ (donc $\vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -V_e \cdot \vec{e_x}$)

à $t = 0$, $t' = 0$, $O = O'$ (même origine spatiotemp au début).

Def : On appelle évènement un processus physique auquel on peut attribuer une position et un temps. Ce processus est défini indep. du choix du référentiel (pas défini par des tps ou des distances)

$E \equiv (t, x, y, z)_{\mathcal{R}}$
$E \equiv (t', x', y', z')_{\mathcal{R}'}$

On admet :
$$ct = \gamma_e (ct' - \beta_e x') \qquad y = y'$$
$$x = \gamma_e (x' - \beta_e ct') \qquad z = z'$$

avec $\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_e}{c})^2}} > 1$ et $\beta_e = \frac{v_e}{c}$ (algébrique)

Le "e" signifie entrainement.

Exercice : exprimer x' et t' en fonction de x et ct (vérifier $\beta_e \to -\beta_e$)

3) Longueur et durée

a) Durée

Déf Un temps (une durée) est appelée durée propre si c'est la durée entre deux évènements ayant lieu au même endroit (donc ds 1 ref.)

On cherche à comparer une durée propre (donc calculée dans le ref lié à l'objet observé supposé sans accélération dans un ref. inertiel) ou : on considère un objet à $\vec{v} = \vec{cst}$ dans le ref galiléens
On appelle R' le ref galiléen associé à cet objet ($\vec{v}_{R'} = 0$), et on prend un autre ref galiléen en transla° $-v_e \vec{e_x}$

R' : objet fixe R : objet mobile à vitesse $v_e \cdot \vec{e_x}$

E_1, E_2 2 evenements associés à l'objet
(ex : E_1 créa° et E_2 desintégra° d'une particule, isolée entre les deux donc de vitesse constante.)

Dans R' : $E_1\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $E_2(0\ 0\ 0\ t')$

dans R (Lorentz) :
$$ct_1 = 0$$
$$ct_2 = \gamma_e(ct' + 0)$$
$$t = t_2 - t_1 = \gamma_e t' > t'$$

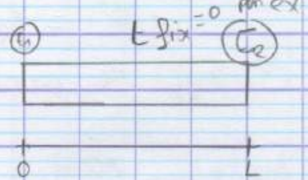
Le temps propre est minimal, c.a.d la durée entre 2 évènements

est la + courte ds le référentiel où les 2 ev sont au m̂ endroit
→ Il y a un ref spécial

b) Longueur

Def : La longueur d'un objet est la différence de position entre ses extrémités mesurées au m̂ moment

Dans le ref de l'objet, on peut mesurer les posi° à n'importe quel moment



dans R (qui bouge)

$E_1 : (0;0;0;0)_R$

$E_2 : (0,L;0;0)_R$

L est la longueur de l'objet car $t_1 = t_2$.

$E_1\ (0;0;0;0)_{R'}$ $\qquad t' = -\gamma_e \beta_e L$

$E_2\ (t', x'; 0; 0)_{R'}$ $\qquad x' = \gamma_e (L - \beta_e \times 0)$

$x' = \gamma_e L = L'$ longueur propre car l'objet est fixe dans R'
donc $t' \neq 0$ ne pose pas de pb !

Donc $L'_{\text{propre}} = \gamma_e L > L$. La longueur propre est maximale.

4) Invariants

Def On définit l'intervalle entre 2 évènements

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 \quad \begin{matrix} >0 \\ \text{ou} \\ <0 \end{matrix}$$

Cette quantité est invariante, c'est à dire que sa valeur est la même quelque soit le référentiel ($\neq$ constante !)

Exercice : Démontrer à partir de Lorentz.

* Si $s_{12}^2 > 0$ alors une relation de causalité peut exister entre les évenements E_1 et E_2 et $\Delta t = t_2 - t_1$ a le m̂ signe dans ts les ref

Démo : $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ arbitraire E_1 et E_2 vérifiant

$$s_{12}^2 > 0 \quad (\forall \text{ Ref par invariance})$$

et $$t_2 - t_1 > 0 \quad \text{dans } \mathcal{R}$$

Montrons $t_2' - t_1' > 0$ dans $\mathcal{R}'$ $(\forall x_1, x_2)$

$$c\Delta t' = \gamma_e (c\Delta t - \beta_e \Delta x)$$

$$c\Delta t' = \gamma_e c \Delta t \left(1 - \frac{\beta_e}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

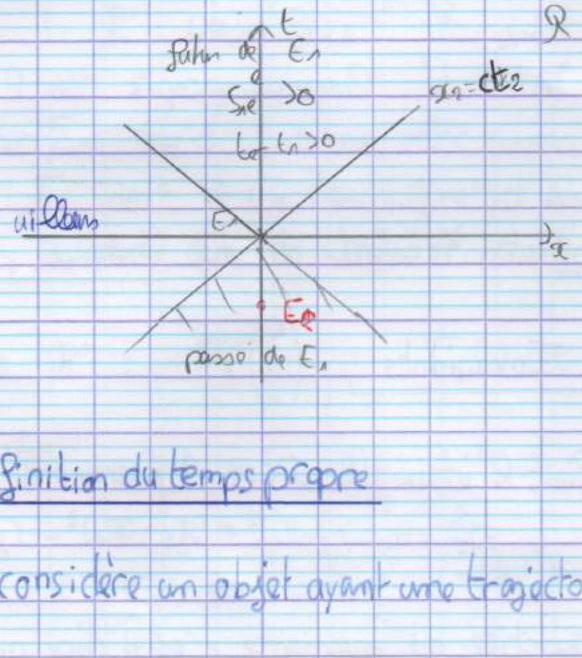
il suffit de montrer $1 - \frac{\beta_e}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$

avec $\Delta \ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

$$\left|\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right| < \left|\frac{\Delta \ell}{c\Delta t}\right| \underset{\text{car } s_{12}^2 > 0}{<} 1 \quad ; \quad \beta_e < 1, \ \frac{\Delta x}{c\Delta t} < 1 \text{ donc } \left(1 - \frac{\beta_e}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) > 0 \text{ CQFD}$$

Représentation graphique

On choisit E_1 comme origine d'espace temps. On cherche la localisation dans l'espace tps des E_2 qui peuvent être causes ou conséquences de E_1

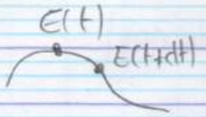


$y_2 = 0, \ z_2 = 0$

* Définition du temps propre

On considère un objet ayant une trajectoire quelconque dans $\mathcal{R}$

$$E : \{ct, x(t), y(t), z(t)\}$$



$v = \left(\frac{dx}{dt} ; \frac{dy}{dt} ; \frac{dz}{dt} \right)$ $\qquad ds^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] > 0$

Cohérent avec le fait que $E(t)$ influence $E(t+dt)$.

On définit le temps propre de la particule comme

Def $\qquad d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$ $\qquad = \gamma_e$, observateur, alors qu'ici $\gamma \Rightarrow$ particule

$d\tau$ est le temps mesuré dans le référentiel galiléen allant à la vitesse de la particule à t

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)} < t_2 - t_1$$

$d\tau$ est indépendant du référentiel $\mathcal{R}$ servant à mesurer dt et γ.

5) Quadrivecteurs

Def $\quad$ Par déf, un quadrivecteur est une quantité physique comportant 4 grandeurs scalaires $(a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$ définie dans $\mathcal{R}$ et dont les valeurs dans $\mathcal{R}'$ sont obtenues par transfo de Lorentz

Lorentz généralisé :

$$a_0 = \gamma_e(a_0' + \beta_e a_1') \qquad a_2 = a_2'$$
$$a_1 = \gamma_e(a_1' + \beta_e a_0') \qquad a_3' = a_3'$$
$$\text{si } \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V_e \vec{e_x}$$

Le $4\vec{v}$ position dans l'espace temps est donc :

$$4\vec{r} = (ct ; x ; y ; z)$$

Propriété : $\exists$ produit scalaire sur les quadrivecteurs

$$4\vec{a} \cdot 4\vec{b} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

Le résultat du produit scalaire est un invariant. (indep du ref)

- Le produit d'un $4\vec{v}$ par rapport à un invariant est un $4\vec{v}$.
- La dérivée d'un $4\vec{v}$ / un invariant est un $4\vec{v}$.

Exemple : Le $^4\vec{V}$ vitesse.

Le quadrivecteur position est $\vec{r}_4 = (ct, x(t), y(t), z(t))$ pour une trajectoire donnée.

$\frac{^4d\vec{r}}{d\tau}$ est un quadrivecteur : c'est le quadrivecteur vitesse

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \qquad V_0 = \frac{d(ct)}{\frac{dt}{\gamma}} = \gamma c$$

$$v_1 = \frac{dx}{dt/\gamma} = \gamma v_x \text{, pareil } 2 \to y \text{ ; } 3 \to z$$

Donc $\quad ^4\vec{V} = (\gamma c ; \gamma \vec{v})$

Exercice : Transformer (on cherche $\vec{v}$ dans R')

- méthode 1 : On cherche dx' et dt' par Lorentz : $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$
- méthode 2 : On transforme $\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z$ par Lorentz (en $\gamma' c$; $\gamma' v_x'$)

Remarque : $4\vec{v} . 4\vec{v} = c^2$ (Invariant, on s'y attendait)

On fait la méthode 2 :

$$\gamma' c = \gamma_e (\gamma c - \beta_e \gamma v_x)$$
$$\gamma' v_x' = \gamma_e (\gamma v_x - \beta_e \gamma c)$$
$$\gamma' v_y' = \gamma v_y$$
$$\gamma' v_z' = \gamma v_z$$

$$\rightarrow \frac{\gamma'}{\gamma} = \gamma_e \left(1 - \beta_e \frac{v_x}{c}\right) = \gamma_e \left(1 - \frac{\vec{v_e} . \vec{v}}{c^2}\right)$$

$\vec{\beta} = \frac{v_e}{c} . \vec{e_x}$

résultat général si $\vec{v_e}$ non // à $\vec{v}$

$$\rightsquigarrow \quad V_x' = \frac{1}{1-\frac{\vec{V_e}\cdot\vec{V}}{c^2}}(V_x - V_e)$$

$$V_{y'} = \frac{1}{\gamma_e\left(1-\frac{\vec{V}\cdot\vec{V_e}}{c^2}\right)} V_y$$

Remarque : Si on travaille avec une onde plane $e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$\varphi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = {}^4\vec{r}\cdot{}^4\vec{k}$ avec ${}^4\vec{k} = \left(\frac{\omega}{c} ; \vec{k}\right) \rightarrow$ On récupère Doppler relativ.

Chapitre 2 : Dynamique

Defs Énergie d'une particule : $\mathcal{E} = \gamma mc^2$

${}^4\vec{v}$ impulsion : $(\gamma mc, \overbrace{\gamma m\vec{v}}^{\vec{p}}) = m\,{}^4\vec{V}$

Limite classique : $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \overset{v \ll c}{=} mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \overbrace{mc^2}^{\text{Ordre } 0} + \overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{\text{Ordre } 1}$

pas échangeable en class.

${}^4\vec{p}\cdot{}^4\vec{p}$ invariant par def.

$$= \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2 c^2$$

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \rightarrow \boxed{\overbrace{\mathcal{E}^2}^{E_{tot}} = \overbrace{m^2c^4}^{E_{masse}} + \overbrace{p^2c^2}^{E_c}} \quad (\vec{p} = \gamma m\vec{v})$$

* Relation fondamentale de la dynamique relativiste

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$$

À retenir : $\vec{f}$ est une force EM (on n'a que celle là) : $\vec{f} = q(\vec{v}\wedge\vec{B} + \vec{E})$
et $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$

Exo : Montrer qu'en utilisant ${}^4\vec{f}\left(\gamma\vec{f}\cdot\frac{\vec{v}}{c} ; \gamma\vec{f}\right)$ et $\frac{d\,{}^4\vec{p}}{d\tau} = {}^4\vec{f}$ PFD façon ${}^4\vec{V}$

On retrouve bien $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$; $\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \vec{f}.\vec{v}$ (≡ Théo E_c)

Suite cours Relat: Deux formalismes possibles en dynam. relativiste :

$$\cdot \quad \frac{d\,{}^4\vec{p}}{d\tau} = {}^4\vec{f} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} {}^4\vec{p} = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) \\ \tau = t/\gamma \\ {}^4\vec{f} = \left(\gamma\vec{f}\cdot\frac{\vec{v}}{c} ; \gamma\vec{f}\right) \end{array}$$

Cela donne :

$$\gamma \frac{d(m\gamma c)}{dt} = \gamma \vec{f}\cdot\frac{\vec{v}}{c} \xrightarrow[\text{vérifier}]{\text{TD}} \boxed{\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = \vec{f}_{ext}\cdot\vec{v}} \equiv \text{Théo de l'énergie cin.}$$

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$$

et $\boxed{\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \vec{f}}$

TD: Vérifier que l'on retrouve Théo E_c à partir de $) \cdot \vec{v}$

· Rq: La masse d'un objet est conservée mais n'est pas la somme des masses de ses constituants

$$\rightarrow \quad m\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = \vec{f}$$

Quelques exemples

→ Système de particules isolées

Pour 1 syst de particules, l'impulsion et l'énergie sont additives :

$$E^{syst} = \sum_{part} E_i \quad \text{et} \quad \vec{p}_{syst} = \sum_{part} \vec{p}_i$$

Suite cours Relat

S'il n'y a pas de forces extérieures au système, l'impulsion et l'énergie sont conservées.

* Équivalence masse énergie :

La masse du système est par définition donnée par la relation :

masse du système

$$p^2c^2 + m^2c^4 = E^2$$

$$M = \frac{\sqrt{(\sum E_i)^2 - (\sum p_i)^2 c^2}}{c^2} \neq \frac{\sum \sqrt{E_i^2 - p_i^2 c^2}}{c^2}$$

exemple : la désintégration $a \rightarrow b_1 + b_2$

On se place ds le ref où a est au repos (a isolé) :

$$m_a c^2 = E_1 + E_2$$

$$0 = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 \quad \text{et} \quad E_2^2 = p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4$$

$$\rightarrow \quad m_a c^2 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4} \quad p_1^2 \geq 0, \; p_2^2 \geq 0$$

$$m_a c^2 \geqslant m_1 c^2 + m_2 c^2$$

La désintégration est possible si $m_a > m_1 + m_2$

(masse) $mc^2 =$

Désintégration du neutron → proton + électron + neutrino

939 MeV → 938 MeV + 0,5 MeV + $\simeq 0$

Chapitre 3 : Le Noyau

I- Les masses possibles

1) Exemple d'un potentiel coulombien et d'un noyau