

MECANIQUE DU POINT

D) Cinématique du point matériel:

1) Référentiel:

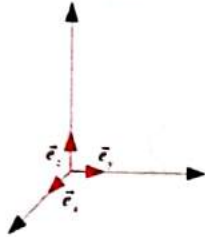
L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liés à un même solide de référence S constitue un repère.

Soit une horloge permettant de mesurer des durées ou intervalles de temps. Si on choisit un instant origine, on dispose alors d'un repère temporel ou chronologie.

L'ensemble d'un repère lié à un solide de référence S et d'une chronologie constitue un référentiel lié à S.

2) Systèmes de coordonnées:

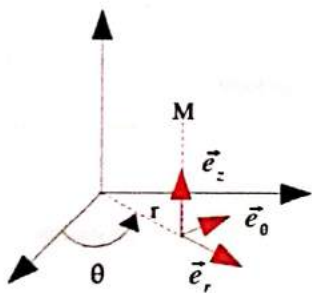
☞ coordonnées cartésiennes:



$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$[O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence

☞ coordonnées cylindriques:



On a: $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence.

r est la distance à l'axe, θ l'angle polaire et z la cote

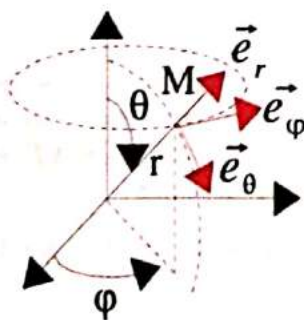
Rem 1: on obtient les coordonnées polaires en supprimant la coordonnée z.

Rem 2: attention! $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ sont des vecteurs mobiles.

Si on pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$, leurs dérivées temporelles se calculent par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

☞ coordonnées sphériques:



On a: $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi]$ est le trièdre de référence.

r est la rayon vecteur, $\theta \in [0, \pi]$ est la colatitude et $\phi \in [0, 2\pi]$ est la longitude

Rem 2: attention! $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ sont des vecteurs mobiles. Si on pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\vec{e}_z = \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_r - \dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\phi$, leurs dérivées temporelles se

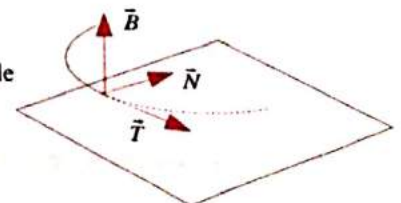
calculent par : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$,

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_\phi - \dot{\theta}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\phi = -\dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_r - \dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_\theta$$

☞ trièdre de Frenet:

\vec{T} est le vecteur tangent, $\vec{N} = R \frac{d\vec{T}}{ds}$ est le vecteur normal. Ils engendrent le plan osculateur. $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ est la binormale.

$$\|\vec{OM}\| = \rho$$



MECANIQUE DU POINT

3) Vitesse et accélération – Expressions diverses:

a) Vitesse:

Soit un trièdre [O,x,y,z], on définit la vitesse par $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

cartésiennes	$\vec{v} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
cylindriques	$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
sphériques	$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$
Frenet	$\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$ avec $\dot{s} = \ \vec{v}\ $

b) Accélération:

Soit un trièdre [O,x,y,z], on définit l'accélération par $\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

cartésiennes	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$
cylindriques	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$
Sphériques	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_\theta + (2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi})\vec{e}_\phi$
Frenet	$\vec{a} = \dot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}$ avec $R = \frac{v^3}{\ \vec{v} \wedge \vec{a}\ }$ rayon de courbure de la trajectoire

4) Moment cinétique et quantité de mouvement:

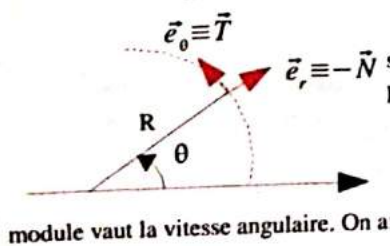
On définit la quantité de mouvement par $\vec{p} = m\vec{v}$. C'est une grandeur combinant un paramètre cinématique (la vitesse) à un paramètre intrinsèque du système (la masse)

Pour les mouvements de rotation, on utilise plutôt le moment cinétique par rapport à un point O donné:

$$\vec{\sigma}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

5) Cas particuliers:

a) Mouvement circulaire:



On le caractérise par $r = R$ et on appelle $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire. On se placera dans le plan $z = 0$. La description dans le repère polaire ou dans celui de Frenet donne les mêmes résultats. Attention toutefois, l'équivalence $\vec{e}_\theta \equiv \vec{T}$ et $\vec{e}_r \equiv -\vec{N}$ n'est valable qu'en mouvement rigoureusement circulaire!

On appelle vecteur rotation le vecteur porté par l'axe de rotation et dont le module vaut la vitesse angulaire. On a: $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

On peut alors exprimer la vitesse et l'accélération d'un point M par:

$$\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta = R\omega\vec{T} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{a} = R\dot{\omega}\vec{e}_\theta - R\omega^2\vec{e}_r = R\dot{\omega}\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$$

Si le mouvement est uniforme, on a $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r = R\omega^2\vec{N}$. L'accélération est normale et centripète.

MECANIQUE DU POINT

b) Mouvement à accélération centrale:

Par définition l'accélération du point M est colinéaire au rayon vecteur. On pose: $\vec{a} = -f(r, \theta)\vec{e}_r$, et on a :

$$\vec{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{v}$$

↳ vitesse aréolaire cste.

Propriétés:

Le mouvement est plan: En effet avec $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, on a $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$. On posera donc: $\vec{\sigma}_0 = m\vec{C}$ et on en déduit que le mouvement est plan.

Loi des aires: On a $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{\sigma}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = m\vec{C}$ d'où $C = r^2\dot{\theta}$

L'aire hachurée dS vaut $dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ donc la vitesse aréolaire est constante:



$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$

Constante de la loi des aires

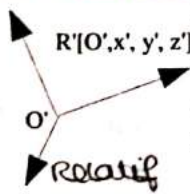
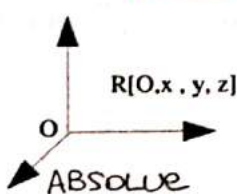
Ce résultat est connu sous le nom de loi des aires: en des temps égaux le rayon vecteur balaie des aires égales.

Formules de Binet: pour l'étude des trajectoires des mouvements à force centrale, il peut être très intéressant d'utiliser les formules de Binet. On les obtient en éliminant formellement le temps des expressions de v^2 et de \vec{a} en utilisant $C = r^2\dot{\theta}$ et en exprimant le tout en fonction de $u = \frac{1}{r}$. On obtient les deux formules de Binet:

$$v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] \vec{e}_r$$

6) Changement de référentiel:



Soient deux référentiel R et R' caractérisés par $[\vec{a}_{O'}]_R = \vec{a}_{O'}$ et par le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{\Omega}$.

On montre en utilisant le fait que les référentiels sont des solides de référence et en utilisant les relations entre vitesses pour deux points d'un même solide que si \vec{u} est un vecteur de R' alors sa dérivée par rapport au temps par rapport à R

peut se calculer sans exprimer les coordonnées de \vec{u} dans R par la formule: $\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$

Soit $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$. En dérivant par rapport au temps, on obtient:

$$\left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right]_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \quad (1)$$

Soit $\vec{v}_a = \left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_R$ la vitesse absolue et $\vec{v}_r = \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right]_{R'}$ la vitesse relative, l'expression (1) devient:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad \text{avec} \quad \vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \quad \text{vitesse d'entraînement.}$$

* le point coïncidant: Soit le point P fixe dans R', est le point coïncidant avec le point H en R à l'instant t_0 .
↳ point mobile
 $\vec{v}(P)_{R'} = 0$ et $H(t_0) = P(t_0)$

vitesse du pt coïncidant par rapport à R est la vitesse d'entraînement!

MECANIQUE DU POINT

Pour les accélérations:

$$\left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right]_R = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right]_R + \left[\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right]_{R'} + \ddot{\Omega} \wedge \left[\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right]_{R'} + \frac{d \ddot{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \ddot{\Omega} \wedge \left(\left[\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right]_{R'} + \ddot{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$$

Soit $\vec{a}_a = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right]_R$ l'accélération absolue et $\vec{a}_r = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right]_{R'}$ l'accélération relative, on a:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad \text{avec} \quad \vec{a}_e = \ddot{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \frac{d \ddot{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \ddot{\Omega} \wedge (\ddot{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \quad \text{accélération d'entraînement et}$$

$\vec{a}_c = 2 \ddot{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ accélération de Coriolis.
 ↳ acc. d'un corps ds un ref en rotation
 ↳ accélération du pt si il était fixe ds R'

II) Dynamique du point matériel:

1) Théorèmes généraux en référentiel galiléen:

Principe fondamental de la dynamique:

Dans un référentiel galiléen R, si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante \vec{f} alors:

$$\frac{d \vec{p}}{dt} = \vec{f}$$

Rem: attention, si la masse du système varie $\frac{d \vec{p}}{dt} \neq m \vec{a}$!

Théorème du moment cinétique:

Dans un référentiel galiléen R, si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante \vec{f} alors:

$$\frac{d \vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \quad \text{où M est le point d'application de la force } \vec{f}$$

Théorème de l'action et de la réaction:

Dans un référentiel galiléen R, soient deux point A et B isolés. Si A exerce sur B la force $\vec{f}_{A \rightarrow B}$ et si B exerce sur A la force $\vec{f}_{B \rightarrow A}$ alors: $\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A}$

Rem 1: attention, si on n'a plus affaire à des points matériels mais à des systèmes $\vec{f}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{f}_{B \rightarrow A}$ ne sont plus portés par la droite AB.

Rem 2: si les actions ne se propagent pas instantanément, ce théorème devient faux!

2) Théorèmes généraux en référentiel non galiléen:

Dans un référentiel non galiléen R', il faut ajouter au bilan des forces, les forces d'inertie d'entraînement

$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c$.

Principe fondamental de la dynamique:

Dans un référentiel non galiléen R', si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante \vec{f}

alors:

$$\left[\frac{d \vec{p}}{dt} \right]_{R'} = \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Théorème du moment cinétique:

appelé aussi force centrifuge
 ↓
 éloigne du centre

MECANIQUE DU POINT

Dans un référentiel non galiléen R' , si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante \vec{f} alors:

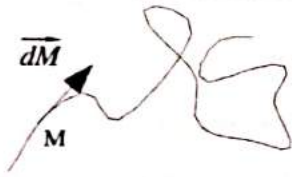
$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right]_{R'} = \vec{M}_0(\vec{f}) + \vec{M}_0(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_0(\vec{f}_{ic})$$

Rem 1: lorsqu'on étudie un équilibre relatif - i.e. un équilibre dans R' , \vec{f}_{ic} n'intervient pas puisqu'elle est proportionnelle à \vec{v}_r donc nulle!

Rem 2: lorsqu'on se place en référentiel terrestre - étude du pendule de Foucault, chute libre avec déviation vers l'est... la force d'inertie d'entraînement est comprise dans le poids $m\vec{g}$ car \vec{g} est la somme de l'accélération d'entraînement et de l'attraction gravitationnelle $\vec{A}_T(M)$ exercée par la Terre sur le système M.

III) Energie cinétique - Energie potentielle - Energie mécanique:

1) Travail - Théorème de l'énergie cinétique:



Soit un point M de R soumis à une force \vec{f} . On définit le travail élémentaire de la force \vec{f} lors du déplacement $d\vec{M}$ par: $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{M}$.

On a alors:
$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot d\vec{M} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \vec{v} dt$$

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} est définie par:
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC):

La variation d'énergie cinétique d'un point entre deux instants dans un référentiel donné est égale au travail des forces qui s'exercent sur le point entre ces deux instants: $E_{c_2} - E_{c_1} = W_{1 \rightarrow 2}$

Ce théorème est très utile pour résoudre les problèmes à un seul degré de liberté. On peut aussi l'utiliser sous la forme du théorème de la puissance cinétique à savoir:
$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Rem: attention, si la masse du système varie le théorème de l'énergie cinétique ne s'applique plus. En effet, sa démonstration à partir du pfd suppose que la masse m du système est constante.

2) Force conservative - Energie potentielle:

Une force est conservative s'il existe une fonction scalaire U telle que: $\vec{f} = -\text{grad } U$. On dit alors que la force \vec{f} dérive du potentiel - ou énergie potentielle U.

Si on cherche le travail de cette force \vec{f} lors du déplacement $M_1 \rightarrow M_2$, on a:

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot d\vec{M} = - \int_{M_1}^{M_2} \text{grad } U \cdot d\vec{M} = - \int_{M_1}^{M_2} dU \quad \text{d'après la propriété fondamentale du gradient. Alors:}$$

$$W = U(M_1) - U(M_2) = -\Delta E_p$$

Le travail d'une force conservative lors d'un déplacement $M_1 \rightarrow M_2$ ne dépend pas du chemin suivi mais seulement du point de départ et du point d'arrivée: il est égal à la diminution d'énergie potentielle.

↳ déf: force conservative

3) Energie mécanique:

Lorsqu'on est en présence de forces conservatives, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

$$\Delta E_c = W = -\Delta U \Leftrightarrow \Delta(E_c + U) = 0$$

On appelle énergie mécanique la quantité: $E_m = E_c + U$

MECANIQUE DU POINT

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique se conserve au cours du temps.

On appelle *intégrale première du mouvement* toute quantité ne faisant intervenir que des dérivées premières par rapport au temps qui se conserve au cours du temps.

Dans le cas présent, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

Si le système est soumis en plus des forces conservatives à des forces non conservatives comme les frottements alors: $\Delta E_c = W_{conservatives} + W_{nonconservatives} = -\Delta U + W_{nonconservatives}$ et $\Delta E = W_{nonconservatives}$

3) Equilibre et stabilité:

Un point est à l'équilibre si son énergie potentielle est minimale en ce point. Cela correspond à $\vec{f} = \vec{0}$. En

effet: $\frac{dE_p}{dx} = 0 \Leftrightarrow \text{grad } E_p = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{f} = \vec{0}$ où x est un paramètre caractérisant le mouvement de M.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que le mouvement du point M au voisinage de ce point soit celui d'un oscillateur harmonique. On montre que cela correspond à la condition: $\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$. C'est un minimum d'énergie potentielle.

Démonstration: supposons pour simplifier que O [0,0,0] soit la position d'équilibre (on peut toujours s'y ramener par un subtil changement d'origine!). Développons $E_p(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de cette position d'équilibre. On obtient:

$$E_p(x) = E_p(0) + x \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_0$$

Or par définition de la position d'équilibre le terme d'ordre 1 est nul. Posons $k = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_0$ et écrivons la

conservation de l'énergie mécanique: $E_c + E_p = cte \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(0) + \frac{1}{2} k x^2 = cte \Leftrightarrow m \ddot{x} + k x = 0$.

On retrouve bien l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique à une dimension si et seulement si $k > 0$ soit

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0 \quad \text{cqfd!!}$$

On peut bien sur généraliser à trois dimensions. On remarque aussi que la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre est donnée par $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m} \right)}$

IV) Oscillateur harmonique - Oscillateur amorti - Oscillateur forcé :

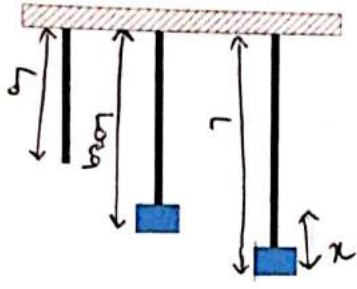
1) L'oscillateur harmonique:

On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système mécanique dépendant d'un seul paramètre décrit par l'équation différentielle: $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ où ω_0 est la pulsation des oscillations. La période T vaut $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

On a vu que tout mouvement d'un système soumis à des forces conservatives au voisinage d'une position d'équilibre stable est du type oscillateur harmonique. C'est donc un mouvement très général

Exemple: soit un point M de masse m suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 .

MECANIQUE DU POINT



frottement nul



↳ Mvt périodique

$$L = L_{0eq} + x$$

Le système est soumis à son poids $mg \vec{e}_z$ et à la force de rappel du ressort $-k(L-L_0)\vec{e}_z$. Le pfd s'écrit:

$$m \ddot{x} = mg - k(L-L_0) = mg - k(x + L_{eq} - L_0)$$

A l'équilibre: $0 = mg - k(L_{eq} - L_0)$

D'où: $m \ddot{x} + kx = 0$

On peut remarquer que le poids n'apparaît plus. C'est normal car le paramètre x est défini depuis la position d'équilibre et pas depuis la longueur à vide. C'est le cas dans 99.99% des exercices avec ressorts. Donc dans l'équation finale, le poids ne doit plus apparaître!

2) L'oscillateur amorti:

On ajoute au bilan de l'oscillateur harmonique

en plus de la force de rappel en $-kx$ avec $k = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_o$.

une force de frottement fluide en $-f \vec{v}$. L'équation générale du mouvement devient:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{f}{m} \quad \text{et}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

τ est le temps de relaxation: c'est l'ordre de grandeur du temps que met le système, pour f faible, à regagner sa position d'équilibre après une perturbation.

ω_0 est la pulsation propre du système: ce serait la pulsation des oscillation si le système n'était pas amorti.

On définit le **facteur de qualité Q** par: $Q = \omega_0 \tau$. *→ Mesure du taux d'amortissement.*
 $Q = 2\pi \cdot \left(\frac{E_4}{E_{dissip}}\right)$ en période

C'est un nombre sans dimension caractérisant la qualité de l'oscillateur: plus Q est fort, plus l'amortissement est faible. Il permet de comparer les comportements de deux systèmes de nature complètement différente comme par exemple un

pendule élastique où $Q = \frac{\sqrt{mk}}{f}$ et un circuit RLC où $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation du mouvement devient: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (1). L'équation caractéristique de cette équation

différentielle fait apparaître trois cas possible:

↳ **Régime pseudo-périodique:** $Q > \frac{1}{2} \Rightarrow$ frottement faible

C'est le cas où le discriminant est négatif. On appelle pseudo-pulsation la quantité $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Les deux racines de l'équation caractéristique sont: $s_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm i\Omega = \frac{-1}{2\tau} \pm i\Omega$.

La solution de (1) est alors déterminées par les conditions initiales.

$$x = e^{-\frac{t}{2\tau}} (A_1 e^{i\Omega t} + A_2 e^{-i\Omega t}) = A e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{où les constantes sont}$$

MECANIQUE DU POINT

Rem 1: on définit le décrement logarithmique par $\delta = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{x(t)}{x(t+nT)} \right]$. Il s'exprime en fonction de Q: $\delta = \frac{1}{2Q}$. La mesure expérimentale donne donc accès au facteur de qualité de l'oscillateur.

Rem 2: plus l'amortissement est faible, plus la pseudo-pulsation tend vers la pulsation propre.

Régime aperiodique: $Q < \frac{1}{2}$

C'est le cas où le discriminant est positif.

Les deux racines de l'équation caractéristique sont: $s_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{-1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)} \right)$.

La solution de (1) est alors $x = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A_1 e^{\omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} t} + A_2 e^{-\omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} t} \right) = A e^{-\frac{t}{2\tau}} \text{ch}(\omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} t + \varphi)$

où les constantes sont déterminées par les conditions initiales.

Rem: le système atteint la valeur d'équilibre sans osciller.

Régime critique: $Q = \frac{1}{2}$

C'est le cas où le discriminant est nul. La racine double de l'équation caractéristique est: $s_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$.

La solution de (1) est alors $x = e^{-\frac{t}{2\tau}} (At + B)$ où les constantes sont déterminées par les conditions initiales.

Rem: le système atteint la valeur d'équilibre en une oscillation. C'est le retour le plus rapide à l'équilibre.

3) L'oscillateur forcé:

On soumet l'oscillateur harmonique amorti à une force $f(t)$ périodique. L'analyse de Fourier montre que $f(t)$ est alors décomposable en une somme infinie de termes sinusoïdaux de pulsations multiples de la pulsation fondamentale de $f(t)$. On aura: $f(t) = \sum_0^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période de $f(t)$. Nous nous bornerons donc à étudier la réponse de l'oscillateur à une sollicitation de la forme $F_0 \cos \omega t$. L'équation générale du mouvement devient:

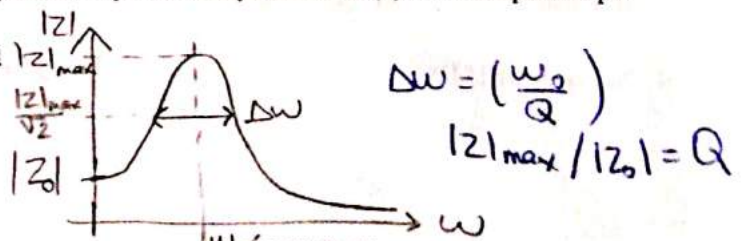
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

La solution est de la forme: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ où $x_1(t)$ est la solution de l'équation sans second membre et $x_2(t)$ la solution imposée par le régime forcé. On a montré au 2) qu'au bout de quelques τ , $x_1(t) \rightarrow 0$. On ne cherchera donc que $x_2(t)$. De plus on sait que la solution étant de même pulsation que la force excitatrice $x_2(t)$ sera de la forme: $x_2(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$.

Soit l'équation: $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y} + \omega_0^2 y = F_0 \sin \omega t$ (2). En posant $z = x + iy$ et en calculant (1) + i(2), on

obtient l'équation (3): $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = F_0 e^{i\omega t}$. La solution de (1) sera nécessairement $x = \Re(z)$.

Posons $z = Z e^{i\omega t}$ où $Z = Z e^{-i\varphi}$ est l'amplitude complexe. En injectant dans (3) et en simplifiant par



MECANIQUE DU POINT

$e^{i\omega t}$, on obtient :

$$Z = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

soit

$$|Z| = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

et

$$\varphi = \arctan \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{b}{a} = \frac{2m\omega}{Re(z)}$$

Rem 1: on appelle *impédance mécanique* le rapport $\frac{f}{v}$.

Rem 2: on peut faire grace au modèle des oscillateurs une **analogie électromécanique** fort utile pour des modélisations de comportement:

<i>Position x</i> → charge q	<i>Vitesse v</i> → intensité i	<i>Force f(t)</i> → tension u(t)
<i>Masse m</i> → inductance L	<i>Coefficient f</i> → résistance R	<i>Constante rappel k</i> → 1/C capacité

V) Forces centrales en $1/r^2$:

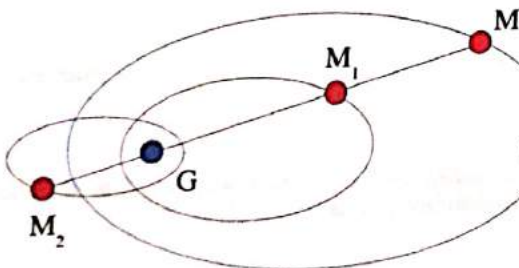
1) Réduction du problème à deux corps - Particule réduite:

On étudie un système isolé de deux particules M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2 . Soit O une origine arbitraire.

On appelle **mobile réduit M** le point matériel fictif de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ égale à la masse réduite du

système et de position donnée par $\vec{GM} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. La vitesse de M est la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 . De même son accélération est l'accélération relative de M_2 par rapport à M_1 .

Rem : on prend souvent pour origine O le centre de masse du système $\{M_1, M_2\}$.



Les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de celle de M par des homothéties de centre G et de rapports respectifs $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{GM}$ et $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{GM}$.
agrandissement ou rétrécissement

car $m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = 0$

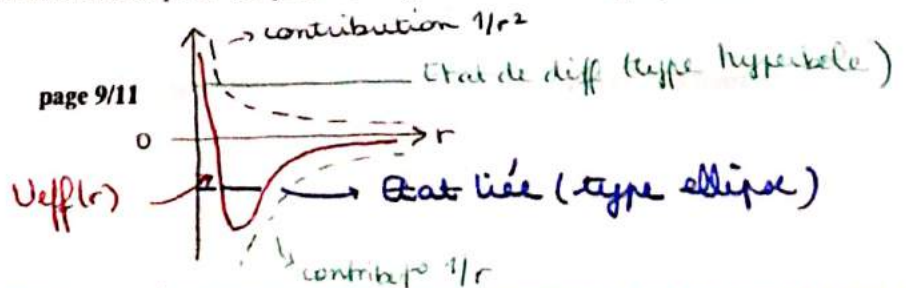
Rem : si une particule est plus massive que l'autre (par exemple $m_1 \gg m_2$), alors $\mu \approx m_2$. La particule la plus massive est quasi-immobile et joue le rôle de G. La trajectoire de la particule la plus légère se confond avec celle du mobile réduit M. Ce sera le cas pour le mouvement d'un satellite dans le champ de gravitation de la Terre ou le mouvement des planètes dans celui du Soleil ($\frac{m_{Jupiter}}{m_{Soleil}} = 1047!$). Pour ces cas qui représentent 99.99% des exercices, on ne fera pas apparaître le mobile réduit: on considèrera le centre attracteur fixe et travaillera directement avec le système soumis à ce champ.

2) Etude générale des trajectoires:

a) Résolution quantitative:

Soit un mobile réduit M de masse réduite m soumis à une force centrale $\vec{f} = \frac{-k}{r^2} \vec{e}_r$. On se place bien sûr en

coordonnées polaires puisqu'on a montré que le mouvement est plan. On pose $U = 1/r$. Alors le PFD appliqué dans le



MECANIQUE DU POINT

référentiel barycentrique à M donne: $\mu \vec{a} = \vec{f}$. En utilisant la formule de Binet relative à l'accélération, on obtient:

$$-C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r = \frac{-k}{\mu} u^2 \vec{e}_r \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{\mu C^2} \quad \text{donc} \quad r = \frac{p}{\epsilon + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

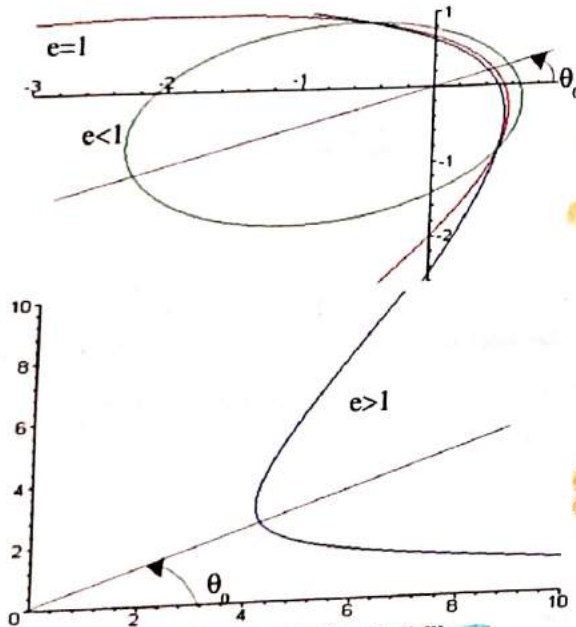
On a $p = \frac{\mu C^2}{k}$; $\begin{cases} \text{si } k > 0 \epsilon = 1 \\ \text{si } k < 0 \epsilon = -1 \end{cases}$ et θ_0 est donné par les conditions initiales.

L'excentricité e se calcule en injectant l'expression de r dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique en utilisant la première formule de Binet pour exprimer v^2 dans l'énergie cinétique:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \mu C^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - \epsilon |k| u = \frac{1}{2} \mu C^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{e^2}{p^2} - \frac{2e\epsilon \cos \theta}{p^2} \right) + \epsilon \frac{|k| e \cos \theta}{p} - \frac{|k|}{p}$$

d'où
$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\mu C^2}{k^2}}$$

b) Tracé des trajectoires:



Dans le cas attractif, $k > 0$. L'équation de la trajectoire est

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

Si $E > 0$ alors $e > 1$, on obtient une hyperbole. C'est un état de diffusion. Si $E = 0$ alors $e = 1$ et on obtient une parabole qui correspond encore à un état de diffusion.

Si $E < 0$ alors $e < 1$, on obtient une ellipse. C'est un état lié. On peut noter que le cas $e = 0$ correspond à une trajectoire circulaire.

$k < 0$

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

Ici $e > 1$, donc la trajectoire sera toujours une hyperbole. Il n'y a que des états de diffusion possibles

c) Etude particulière de l'ellipse:

L'équation est $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$. G sera situé à l'un des foyers.

L'apogée est à $r_A = \frac{p}{1+e}$, le périégée est à $r_P = \frac{p}{1-e}$ donc le grand axe de l'ellipse vaut

$$2a = r_A + r_P = \frac{2p}{1-e^2}. \text{ Or } e = \sqrt{1 + \frac{2E\mu C^2}{k^2}} \text{ et } p = \frac{\mu C^2}{k}.$$

On obtient alors l'expression de l'énergie totale en fonction du demi grand axe de l'ellipse:

$$E = \frac{-k}{2a}$$

MECANIQUE DU POINT




Calculons maintenant la période de révolution du mobile. Sachant que la vitesse aréolaire vaut $v_a = \frac{dS}{dt} = \frac{r\dot{\theta}^2}{2} = \frac{C}{2}$, on peut écrire que $T = \frac{S}{v_a}$ où $S = \pi ab$ est l'aire de l'ellipse. Or le paramètre p s'exprime

aussi en fonction du grand axe et du petit axe de l'ellipse par $p = \frac{b^2}{a}$. On obtient après calculs que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{k}$

3) Mouvement des planètes – Mouvement keplerien:

La théorie précédente peut s'appliquer en première approximation au mouvement des planètes dans le champ gravitationnel du Soleil. Cela suppose bien sûr qu'on néglige les actions des planètes entre elles comme par exemple les perturbations de la trajectoire d'Uranus par Neptune – perturbations qui permirent à Joseph Le Verrier de postuler en 1845 l'existence de Neptune qui ne fût découverte qu'un an plus tard -. On négligera aussi les effets relativistes tels que l'avance du périhélie de Mercure – rotation du périhélie de 42.9 seconde d'arc par siècle!!-.

Le mouvement des planètes est décrit dans le référentiel de Copernic en supposant le Soleil fixe et à symétrie sphérique par trois lois. Elles furent énoncées par l'astronome Johannes Kepler en 1605 au vu des excellentes mesures des positions des planètes effectuées peu avant par le Danois Ticho Brahé – mesures effectuées à l'oeil nu et dont la précision dépassait la minute d'angle.

-  Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers
-  En des temps égaux les rayons vecteurs balaisent des aires égales
-  Le rapport des carrés des périodes aux cubes des demis grands axes sont indépendants de la planète

On peut remarquer que ces lois ont déjà été trouvées lors de la théorie précédente.

4) Mouvement des satellites – Vitesses cosmiques:

On peut utiliser la théorie précédente pour décrire le mouvement des satellites artificiels si le mouvement est décrit dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, si la seule force agissant sur le satellite est la force de gravitation terrestre, si l'orbite est assez haute (supérieure à 100km) pour négliger l'effet de traînée aérodynamique, si elle est inférieure à 10 rayons terrestres afin de négliger l'action de la Lune ou du Soleil et enfin si on considère que la Terre est à symétrie sphérique. Force gravitationnelle: $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{GMm}{r^2} \vec{u}_{12}$ champ gravitationnel $\vec{G}(M_1)$

On définit la première vitesse cosmique comme étant la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire dont le rayon est quasiment celui de la Terre.

Comme $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_T} = -\frac{GMm}{2R_T}$ d'après ce qui précède, on a $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_T}}$

Elle est de l'ordre de 8km/s.

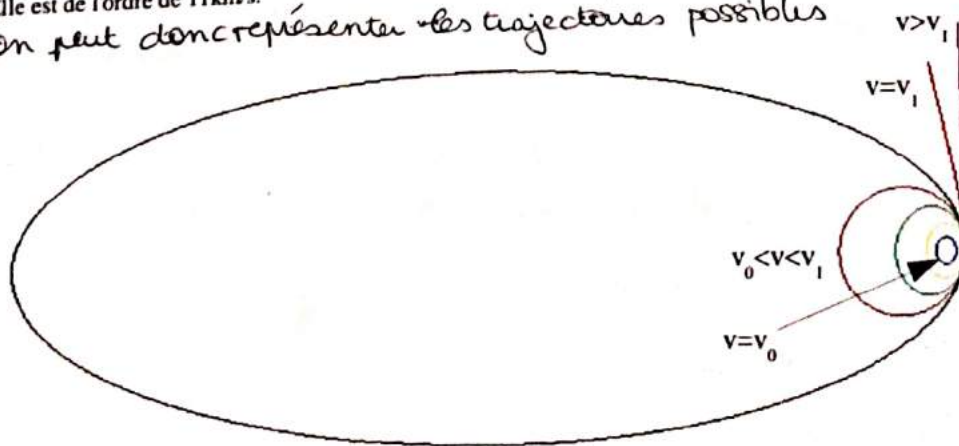
On peut ensuite définir la vitesse de libération comme étant la vitesse correspondant au passage d'un état lié à un état de diffusion.

Comme $E_{libération} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R_T} = 0$ on a: $v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$

Elle est de l'ordre de 11km/s.

On peut donc représenter les trajectoires possibles

Nicolas CHI



Cinématique du solide

↳ Solide indéformable (distances fixes au sein du solide).
 dans un référentiel dépend de 6 paramètres (degré de liberté)
 • 3 composantes barycentres G + 3 angles d'Euler.

• vitesse instantanée dans un solide

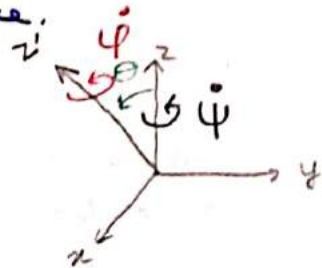
2 points $A; B$ du solide en mvt ds R : $\vec{v}(B) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$ et $\vec{v}(M)_R = \vec{\omega}_{R/R} \wedge \vec{OM}$

→ Changement de réf: $\omega(S)_R = \omega_{R/R} + \omega(S)_{R'}$

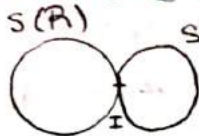
• Angles d'Euler → permet le repérage d'un solide mobile autour d'un point fixe.

$\omega = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{k}$

θ angle de nutation : inclinaison du solide
 ψ angle de précession
 φ rotation propre.



• Condition de roulement



On appelle vitesse de glissement v_I de S' par rapport à S , la vitesse de I lié à S' dans le ref de S : $\vec{v}(I_{R'}/R)$ (Aucun glissement si $v_I = 0$)

Cinétique du solide

↳ on \neq ramène au cas d'un $\$$ de points mais en élément de volume $d\tau$.

• Barycentre: $\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OA}_i}{\sum m_i} \rightarrow \vec{OG} = \frac{\iiint \rho \vec{OA} d\tau}{\iiint \rho d\tau}$

• Résultante cinétique: $\vec{p} = \iiint \rho \vec{v} d\tau = \iiint \rho \frac{d\vec{OG}}{dt} d\tau$... ect.

• Rotation autour d'un axe fixe Δ

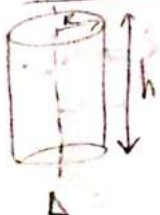
• Moment d'inertie: $J_\Delta = \iiint \rho r^2 dm$ → répartition des masses au sein du solide
(distance à l'axe Δ)

$L_\Delta = J_\Delta \omega$; $E_\Delta = J_\Delta \frac{d\omega}{dt}$; $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$
 $\sum \vec{O}(\vec{F}) = \vec{O} \wedge \vec{F}$

• Théorème de Huygens: lorsque l'axe Δ est situé à une distance a de G
 $J_\Delta = J_G + ma^2$ J_G moment par rapport à l'axe $\Delta_G \parallel \Delta$ et passant par G .

Calcul

moment d'inertie d'un cylindre



$J_\Delta = \int r^2 dm = \iiint \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi R$

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{h\pi R^2} \Rightarrow J_\Delta = \frac{MR^2}{2}$

o Mouvement d'un solide autour d'un point fixe O

$$[L^*_O] = [I_O][\omega] \quad \text{avec} \quad [I_O] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

avec $I_{xz} = \iiint (y^2 + z^2) dm$

$I_{xy} = I_{yx} = \iiint xy dm \dots$

on cherche en général les moments d'inertie principaux $I_{xx}; I_{yy}; I_{zz}$ à partir des symétries

et $I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

calcul: * moment d'inertie au centre de la sphère

$I_0 = \frac{3}{2} I_{xx}$ car $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

$$I_0 = \iiint r^2 dm = \iiint \rho r^4 dr d\theta \sin\theta d\varphi = \rho \frac{R^5}{5} 4\pi$$

$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$

$I_0 = \frac{3MR^2}{5}$

* Moment d'inertie sur un axe Δ (diamètre)

$I_\Delta = I_{xx} = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

* Moment d'inertie cylindre en son centre et ses axes principaux

$I_{zz} = \iiint (x^2 + y^2) dm = \iiint r^2 \rho r dr d\theta dz = \frac{R^4}{4} \rho 2\pi h = \frac{MR^2}{2}$

$I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \iiint (r^2 + z^2) dm = \iiint (r^2 + z^2) \rho r dr d\theta dz$

$= \rho \left[\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R z^2 r dr d\theta dz \right]$

$I_0 = \left(\frac{MR^2}{2} + \frac{h^3}{3} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \right)$

$= M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right)$

$= M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right)$

or $I_{xx} = I_{yy} \Rightarrow I_0 = \frac{1}{2} (2I_{xx} + I_{zz})$

donc $I_{xx} = I_0 - \frac{I_{zz}}{2} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$

o Théorème de Koenig

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{OG} \wedge m_G \vec{v}_G + \vec{L}_G^*$$

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} m_G v_G^2 + E_{C_{R_G}^*} = \frac{1}{2} m_G v_G^2 + \frac{1}{2} \omega \vec{L}_G^*$$

$$[\vec{L}_G^*] = [I_G][\omega]$$

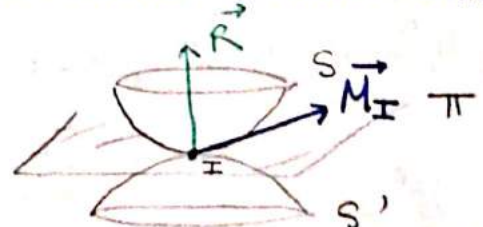
o Actions mécaniques sur un solide

↳ actions intérieures au solide + actions extérieures sur le solide (Forces extérieures ou liaison = contact)

o Actions de contact

Torseur des efforts

$$(F) = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i & \text{la résultante} \\ \vec{M}_A = \sum_i A\vec{M}_i \wedge \vec{F}_i & \text{moment résultant en A} \end{cases}$$



→ Les actions mécaniques de S' sur S sont caractérisées en R par \vec{R} et \vec{M}_R .

Si contact ponctuel alors $\vec{M}_R = 0$; Dans la réalité, il y a un écartement local des solides et une petite surface de contact autour de R.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{RN} + \vec{M}_{RT}$$

N s'oppose à l'écartement, T au glissement

M_{RN} s'oppose au pivotement, M_{RT} au roulement

o Loi de frottements - loi de Coulomb

↳ lois empirique

coeff de frottement statique

* Glissement

- pas de glissement si $\|\vec{T}\| < (\mu_s) \|\vec{N}\|$
- glissement si $\|\vec{T}\| = (\mu_d) \|\vec{N}\| \leq (\mu_s) \|\vec{N}\|$ et \vec{T} est opposé au glissement

* Pivotement

- pas de pivotement si $\|\vec{M}_n\| < \lambda_s \|\vec{N}\|$
- pivotement si $\|\vec{M}_n\| = \lambda_d \|\vec{N}\| \leq \lambda_s \|\vec{N}\|$

coeff de frottement dynamique

* Roulement

- pas de roulement si $\|\vec{U}_T\| < \delta_s \|\vec{N}\|$
- sinon $\|\vec{U}_T\| = \delta_d \|\vec{N}\| \leq \delta_s \|\vec{N}\|$

on néglige souvent le pivotement et le roulement. $\vec{U}_Z = 0$

o principe d'actions réciproques

→ Soit 2 solides S et S' en interaction :

$$\begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{U}_{1 \rightarrow 2}(P) = -\vec{U}_{2 \rightarrow 1}(P) \end{cases}$$

Donc à l'int du $\$$ composé de S et S' :

$$\begin{cases} \vec{R}_{int} = \vec{R}_{12} + \vec{R}_{21} = 0 \\ \vec{U}_{int}(P) = 0 \end{cases}$$

⇒ il reste uniquement \vec{R}_{ext} et $\vec{U}_{ext}(P)$
↳ (si ils sont nuls alors $\$ \ddot{a}$ l'éq.)

o Théorème général ⇒ Pour l'étude d'un $\$$ méca ; on déf ses degrés de libertés et on a ainsi le nbre d'éqo à écrire.

o les travaux

$$SW = \int \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int \vec{f} \cdot \vec{v} dt \quad \text{et} \quad \frac{SW}{\delta t} = \vec{f} \cdot \vec{v} \Rightarrow \text{puissance.}$$

↳ forces intérieures : SW est indep du réf de calcul.

* Poids, $SW = m\vec{g} \cdot d\vec{O}_1\vec{G}$

O_1 : pts fixe d'étude

* Actions méca sur le solide : $SW = (\vec{R} \cdot \vec{v}(P) + \vec{\omega} \cdot \vec{U}(P)) dt$
 $SW_{int} = 0$

* Actions de liaisons/contact : $SW = (\vec{R}_{liaison} \cdot \vec{v}(I) + \vec{\omega} \cdot \vec{U}(I)) dt$
↳ nul si aucun frottement, si il y a uniquement des glissement

↳ Travail total de 2 solides S_1 et S_2 en contact.

$$SW = \vec{R}_{12} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \vec{U}_{12} \cdot (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$$

o Théorème de la résultante cinétique

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{ext}$$

o Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{U}(I)_{ext} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{U}(G)_{ext}$$

o Théorème du moment dynamique

$$\vec{\delta}(I) = \vec{U}(I)_{ext}$$

o Théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = SW_{ext} + SW_{liaison} + SW_{int}$$

(Si en R' il faut pas oublier P_{ie})