

◦ Théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

circulation de \vec{a} le long d'un contour fermé
 \Leftrightarrow flux du rot de \vec{a} à travers une surface Σ
s'appuyant sur Γ .

◦ Théorème de Green-Ostrogradsky

$$\oiint_{\Sigma} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div}(\vec{a}) \cdot dV$$

flux de \vec{a} à travers $S \Leftrightarrow$ intégrale de sa div. étendue
au volume τ délimité par S .

◦ ANALYSE vectorielle

$$\text{div}(\text{grad} f) = \Delta f$$

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{a})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta \vec{a}$$

Sphère
 $A = 4\pi R^2$
 $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Bisque/cercle
 $A = \pi R^2$

Cylindre
 $S_{\text{lat}} = 2\pi r h$

I - Électricité :

1) Effet d'un champ \vec{E}

• Densité de courant

$$\vec{I} = \int \vec{j} d\vec{S} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \vec{j} = \frac{dQ}{dS} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{dS}$$

↳ courant élect. est un débit de charges électriques à travers une surface

* Equation conservation de la charge

$$\rho : \text{densité de charge} \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dV} = nq$$

↳ densité de porteurs

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{dS} \frac{d\vec{l}}{dt} = \rho \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right)$$

↳ Echelle mésoscopique

Conservation de la charge $\Rightarrow \frac{dq}{dt} = -i(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$
$$\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}) dV$$
$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{j} = 0$$

• Modèle de Drude

↳ Modèle e^- amorti ; assimile les e^- à des boules de billard.

Théorie cinétique des gaz \Rightarrow aux e^- des métaux (descript° classique)

↳ Propriétés des Métaux

→ Conductivité électrique

→ Conductivité thermique

→ Effet Hall

Hyp : * $\rho = ne^-$ (charge $-e$ et masse m) sans interact°

* e^- subissent collisions (proba collision $\frac{dt}{\tau}$)
↳ temps moyens entre 2 collis°

* force de frottement visqueux dû aux collisions $F_f = -m \frac{v_e}{\tau}$

↳ Démo cours

• Loi d'Ohm locale

Soit $\vec{v}_e = -\mu \vec{E}$
↳ la mobilité des e^- (dep de \vec{E})

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v} = nq \mu \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

↳ $\sigma = nq\mu$
↳ conductivité électrique

le modèle DUFF → e⁻ accélérés uniformément dans \vec{E} entre 2 collisions; après collision il retourne dans leur état initial

Soit $v_{e^-} = v_{0i} + \left(\frac{-eEt}{m_e}\right) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -eE$ et $p = mV$

$\langle v_{e^-} \rangle = \langle v_{0i} \rangle + \langle \frac{-eEt}{m_e} \rangle$ avec $\langle v_{0i} \rangle = 0$ et $\langle t \rangle = \tau$

$\langle v_{e^-} \rangle = \frac{-eE\tau}{m_e} \rightarrow \vec{j} = -ne\langle v_{e^-} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m_e} E \Rightarrow$ Loi Ohm locale

• Effet Joule ⇒ manifestation thermique de la résistance électrique

↳ perte énergie élect en thermiq

$F = \frac{E}{c} \quad | \quad P = \frac{E}{c}$

En régime permanent ⇒ $q\vec{E} - \sum \frac{d}{dt} m = 0$
 $0 = q\vec{E} \cdot \vec{v} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$ (passage en puissance)
 ↳ $P_{\text{élect}} > 0$ ↳ $P_{\text{frott}} < 0$
 ↳ Fournit P à la matière ↳ EFFET JOULE

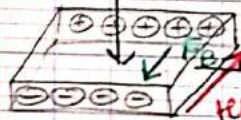
$\frac{m}{2} v^2 = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

↳ si ndz change : $(q\vec{E} \cdot \vec{v}) ndz = \vec{j} \cdot \vec{E} dz = dP$

$P = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dL = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho^2 dV = \frac{dP}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ Loi Joule local

utilisés pour mesurer \vec{B}

• Effet Hall → courant I traversant un matériau dans un champ $\vec{B} \Rightarrow$ tension V_H à I et \vec{B}



Tension Hall V_H

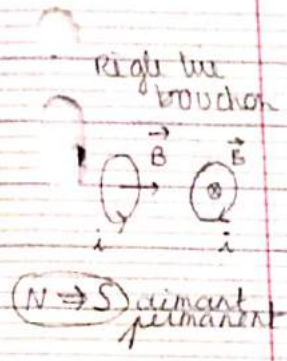
- * \vec{B} agit sur les charges en movt
- * \vec{v} produit par des charges à une vitesse \vec{v}

↳ $\vec{F}_B = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ (force Lorentz)
 ↳ échange \oplus vers \ominus créant V_H + champ \vec{E}_H

* champ E_H responsable d'une force sur les e⁻ : $F_E = -e \cdot E_H$ (force de Coulomb)

Equilibre ⇒ $\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0} \Rightarrow E_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$
 $-e\vec{v} \wedge \vec{B} + -e\vec{E}_H = 0$

$E_H =$



2) Effet d'un champ B

↳ \vec{B} décrit les interactions des charges en mvt les unes par rapport aux autres.

charges en mvt \Rightarrow création \vec{B}

↳ souvent dû à un champ \vec{E} .
(courant \vec{I})

Forces de Laplace \rightarrow si courant \vec{I} dans un champ \vec{B} sur $d\vec{l}$

macro $\vec{F}_{Lap} = \int I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

ou $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \rightarrow$ part. dans un champ \vec{B} .

↳ micro Lorentz

↳ Force \vec{B} ne travaille pas

Bobine N spire $B = \mu_0 N I$

* Moment magnétique (circuit fermé)

$\vec{m} = i \cdot \vec{S}$

moment d'une force F appliqué en A par rapport à O
 $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{AF}$

↳ force Laplace = 0 mais moment des forces non nul

$\vec{U} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

↳ si $F_{Lap} = 0$; \vec{U} indep du pt choisit

* travail des forces: $\frac{dW_{trav}}{dt} = F \cdot v$

Induction \Rightarrow Apparition si qll chose varie

↳ apparition d'un courant électrique (= courant induit) dans un circuit placé dans un champ magnétique, si:

* \vec{B} variable au cours du tps (cas Neumann)

* circuit mobile (cas Lorentz)

↳ Loi de Lenz: courant \vec{E}_{ind} tend à s'opposer à ce qui le produit.

• Si $B(t)$; le champ crée par \vec{E}_{ind} s'oppose à la variation

• Si circuit mobile; forces de Laplace s'oppos au mvt.

Productif = variation du flux du champ de le circuit

Force électro-motrice induite (tension)

$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\phi}{dt}$ loi de Faraday

↳ loi Lenz

$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

* Auto-induction ($B(t)$)

↳ courant variable \rightarrow B variable \Rightarrow FEM auto-ind

Bobine: inductance propre $L \Rightarrow \Phi = L \cdot i$

2 circuits: p flux propre + flux autre circuit

↳ Flux Φ_{12} en 2 créé par 1 : $\Phi_{12} = \pi i_1$
 $\Phi_{21} = \pi i_2$

inductance
mutuelle

$$M \leq L_1 L_2$$

* Courants de Foucault

↳ courant induit au sein d'un conducteur non filiforme.

II - Electrostatique

→ Eq° caractéristique linéaire

Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$

$\vec{E} \rightarrow \vec{0}$
 $r \rightarrow \infty$

ligne de champ

$\frac{dx}{\epsilon_x} = \frac{dy}{\epsilon_y}$

1) Champ et charges

① $\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

② $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$

- ① \vec{E} est un champ de gradient $\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } V$ potentiel électrostatique
 ② $-\text{div } \vec{E} = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ Eq° de Poisson

• LOI DE COULOMB

Electrostatique étudie l'interaction entre des charges fixes.

force de sur 2

$\vec{f}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$ loi de Coulomb

$\vec{F} = q_2 \vec{E}_1$

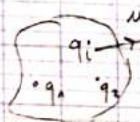
et $\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{e}_{12}$

⇒ déduit de $\vec{E} = -\text{grad } V$ + th. de Gauss avec une charge de une sphère

$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{conste}$

• Champ et potentiel d'une distribution de charges

pr 1 volume



$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$ et $V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \text{const.}$

Si distribut° continue $\sum q_i = \rho dV$

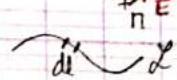
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho \vec{u}}{r^2} dV$

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r}$

3 types de distribution de charges.

\vec{E} hors dép et continu surf sur Σ

- Distribution linéique (charge sur une ligne)



$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$

densité linéique de charge (C.m⁻¹)

\vec{E} hors dép et continu surf sur S.

- Distribution surfacique (charge sur une surface)

$dq = \sigma dS$

densité surfacique de charge (C.m⁻²)

↳ discontinuité à la traversée

- distribution volumique

$dq = \rho dV$

aucune restriction

PRINCIPE DE CURIE

les effets
moins les sym.
des causes
 \vec{E} n° sym que
distri de charge

Invariance et Symétries

éliminer dt dépend
le champ \vec{E} en n.
(si quelque soit n;
 \vec{E} ne dep pas de la
coordonnées)

- Invariance par translation
- Invariance par rotation

éliminer les composantes
du champ \vec{E} .

- Plan de symétrie
↳ $\vec{E} \in$ à ce plan
- Plan anti-symétrie
↳ $\vec{E} \perp$ au plan.

Théorème de GAUSS

Flux de \vec{E} à
travers une
surface fermée
est \propto à la
charge dans le
volume qui la délimite

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Par champ de gravitat°
 $Q_{int} \rightarrow n_{int}$
 $\frac{1}{4\pi G_0} \rightarrow -G$
 $\oint_V \vec{G}(n) dS = -4\pi G M$

Utilisa°
haut degré
de symétrie \Leftarrow
fin ou calcul
direct ou
trouver une
surface de Gauss

Plan chargé et condition de passage

$V \rightarrow$ continue à la surface (pas d'extremum en dehors
des charges)

E_N discontinu / E_T continue

$$\hookrightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \vec{n}_{12}$$

Energie électrostatique

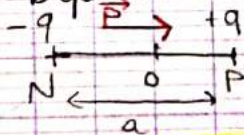
$$E_p(M) = qV(M)$$

$\Rightarrow E_p$ d'une charge q en M où
il y a un champ \vec{E} électrostatique

$$\hookrightarrow \vec{F} = -\text{grad}(E_p) = -q\vec{E}$$

Energie électrostatique : $E_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V d\tau$

2) Dipôle électrostatique

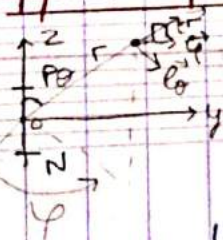


↳ dipôle si on étudie ses effets
à distances $r \gg a$.

$$\vec{p} = qNP$$

Champ et potentiel créé par le dipôle

Approx dipolaire : $r \gg a$; on obs champ loin du dipôle



$$V = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$r_1^2 = p_0^2 + n^2 - 2p_0 n \cos\theta$$

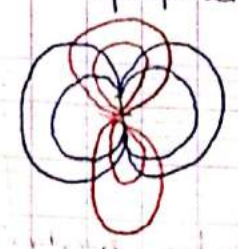
$$r_2^2 = n^2 + p_0^2 - 2n p_0 \cos\theta$$

↳ d'après.

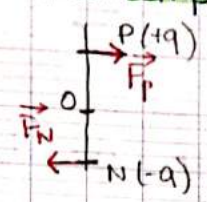
ligne champ \vec{E}
equipotentielle

$$V = \frac{q a \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dr}$$



° Action dans un champ \vec{E}_{ext} (dipôle passif)
 \vec{E}_{ext} uniforme



$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_P + \vec{F}_N) = \vec{OP} \wedge \vec{F}_P + \vec{ON} \wedge \vec{F}_N$$

$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

↳ indep de O

$$E_{pot} = \vec{E}_{ext} \cdot (qNP) = E_p(N) + E_p(P)$$

↳ E_{pot} extremal si \vec{p} et \vec{E} colinéaire

Δ si \vec{E} non uniforme

$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}) \Rightarrow$ dipôle vers champ fort.
* Si varia^o \vec{E} sur a très faible \Rightarrow expression valable en mettant $E_{ext}(0)$

° Dipôle induit

↳ lorsqu'il n'y a pas de dipôle permanent, mais dipôle induit avec un champ ext $\vec{E}_{ext} \Rightarrow$ déplacement opposé des barycentre

$$\vec{P}_{ind} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{ext}$$

↳ Polarizabilité électronique

3) Cohésion de la matière

↳ Interaction dipolaire

Liaison de Van Der Waals \Rightarrow interaction électrique de faible intensité lente atomes, mol...

Keesom
interact° 2 molécules polaires

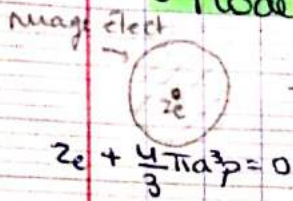
Debye
interact° molécule polaire + dipôle induit

London
2 dipôles induits

Chaque dipôle crée un champ au voisinage d'un autre dipôle (n molécule) qui interagit alors avec ce champ (et inverse) \Rightarrow Interact° VdW

4) Milieu diélectrique (neutre) → pas de charge mobile

◦ Modèle microscopique de Mossotti



Sous un champ \vec{E}_{ext} , le noyau se déplace de \vec{r} .



on regarde les forces sur le noyau: $ZeE_{ext} + ZeE_{ind}$ force exercée par le nuage. on travaille avec Gauss (P à d=r)

Equilibre:

$$ZeE_{ext} - \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow E_{ind} = \frac{P}{3\epsilon_0} = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

$$\vec{r} = \vec{E}_{ext} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze}$$

Le moment dipolaire induit: $\vec{p} = Ze\vec{r}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha_e \vec{E}_{ext} = \frac{Ze}{3\epsilon_0} 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_{ext}$$

$$\alpha_e = 4\pi a^3 \quad \text{Dim d'un volume [m}^3\text{]}$$

Milieu linéaire

Si ses perméabilité diélectrique et magnétique ne dep pas de \vec{E} et \vec{B}

elles décrivent la resp du matériau face à un champ ext.

◦ Description macroscopique

Diélectrique sous champ \vec{E} ⇒ relation de dipôle

Polarisation (macro) ⇒ $\vec{P} = \frac{n \vec{p}}{\text{volume}}$ moment dipolaire (micro)

Pola: { électronique, atomique, orientation

* Vecteur de déplacement électrique \vec{D} permittivité relative du milieu

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_{ext}$$

\vec{P} est sut \propto au champ qui l'a créé (cas linéaire)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$\chi_e = \frac{N \vec{p}}{\epsilon_0 E}$ susceptibilité électrique du diélectrique

↳ Lenses si milieu non linéaire

↳ caractérise la polarisation suite à un champ \vec{E}

ϵ_0 Maxwell milieu diélectrique (statique)

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

• **Champ de dépolariation**

À l'intérieur d'un diélectrique, le champ \vec{E} n'est pas égal au champ \vec{E}_{ext} .

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{depola}$$

champ de dépolariation

$$\vec{E}_{dep} = - \left(N_{dep} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right)$$

facteur de dépolariation

→ champs opposés au champ ext créés par les dipôles induits

↳ cas milieu linéaire facteur num. qui dep de la forme de l'échantillon + direction \vec{E}_{ext} .

• **Condensateurs**

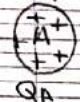
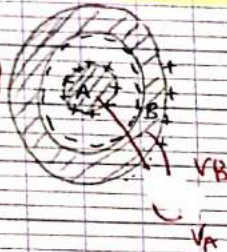
↳ Phénomène d'influence électrostatique totale:

Les CONDUCTEURS (en équilibre électrostat)

force moyenne sur les charges = 0

↳ $\vec{E} = 0$

↳ $V = \text{cte}$



Si ≠ de potentiel entre A et B
↳ apparition charge +Q et -Q

influence totale

- B est neutre ; on s'approche d'un conducteur A chargé +.
- les e⁻ libre de B (car conducteur) sous l'action du champ créé par A vont se déplacer.

$$C = \frac{|Q|}{|V_A - V_B|}$$

(Farad)

→ dep de la géométrie du condensateur
→ et du milieu isolant.

• **Champ local**

Champ macro (à grde distance) : $\vec{E}_{macro} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{dep}$

Champ local (à l'intérieur) : $\vec{E}_{local} = \vec{E}_{macro} + \vec{E}_L + \vec{E}_{dip}$

$$\vec{E}_{local} = \vec{E}_{macro} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

\vec{E}_L : champ dû à la polarisation des charges sur la surface interne d'une cavité sphérique creusée de façon fictive dans l'échantillon (≃ atome central)

Champ de la cavité de Lorentz *Champ des dipôles voisins à l'intérieur de la cavité*

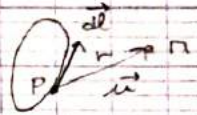
III - Magnétostatique

1) Champ et courants

• Loi Biot et Savart

↳ Calcul \vec{B} créé en un pt M par un courant I circulant sur $d\vec{\ell}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$



Pour distribution volumique $\vec{B}(M) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$

\vec{B} appartient aux plans anti-symétriques
Règle d'invariance même que champ \vec{E} .

• Théorème d'Ampère

$\vec{B} \Rightarrow$ flux conservatif à travers S fermée : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad I_{\text{enlacé}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

• Équations de Maxwell

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

et

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$\vec{B} \rightarrow 0$; loin des charges

$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ champ de rotationnel $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$A \in$ plan de symétrie.

Eq^o de Poisson

$$\Delta A + \mu_0 j = 0 \quad \text{avec } \text{div } \vec{A} = 0$$

potentiel vecteur

• Courant de surface et conditions passage

$A \rightarrow$ continu à la surface

B_N continue / B_T discontinue $\vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12})$

On déf. un vecteur de densité surfacique \vec{j}_s : en 1 pt, c'est la Σ de j sur toute l'épaisseur de la nappe.

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{\tau} \Rightarrow \int \vec{j}_s \cdot d\vec{S}$$

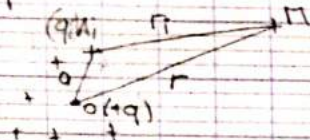
$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow I = \int \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell}$$

IV - Rayonnement dipolaire

↳ rayonnement en vue par des charges en mvt.

1) Position du problème

$$q_i = -q$$



$$\vec{p} = qA\vec{i}_O$$

• on souhaite calculer

$\vec{A}(M, t)$ et $V(M, t)$ de cette distribution de charges

APPROXIMATION DIPOLAIRE : $\|OA_i\| \ll r$

↳ taille du dipôle negl devant la distance d'observation.

Potentiel retardés (issus jauge de Lorentz)

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(t - r_i/c)}{r_i} dV \quad \vec{j} = nq\vec{v}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{nq\vec{v}(t - r_i/c)}{r_i - v r_i/c} dV$$

↳ en M après un certain tps ⇒ tps de propagation

1 part

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(t - r/c)}{r_i - v r_i/c}$$

↳ difficile à mettre en calcul

APPROXIMATION RELATIVISTE

$$|r_i - r| \ll a$$

$$\left| \left(t - \frac{r}{c} \right) - \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right| \ll \frac{a}{c}$$

↳ les 2 tps retardés diffèrent de max a/c

T : le tps d'évolution de la distribution de charges

$$\left| \left(t - \frac{r}{c} \right) - \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right| \ll T \Rightarrow \frac{a}{c} \ll T$$

$$\frac{a}{T} \ll c \Leftrightarrow v_{\text{charge}} \ll c \Rightarrow \text{charge en mvt non relativiste}$$

$$a \ll cT \quad (\text{mvt sinus}) \Rightarrow a \ll \lambda$$

↳ émis par le λ .

$$a \ll r$$

$$\Rightarrow r \gg \lambda$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(t')}{r}$$

$$t' = t - r/c$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}(t')}{r}$$

⇒ calcul de V à l'aide de la jauge de Lorentz

2) Champ produit par un dipôle oscillant

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Zone de rayonnement (à grande distance) $\Rightarrow r \gg \lambda$

\hookrightarrow terme \ddot{p} prépondérant.

Si $r \ll \lambda$; on est dans le cas statique

\hookrightarrow Pas de rayonnement: $\vec{\Pi} = 0$; énergie E_n proche du dipôle

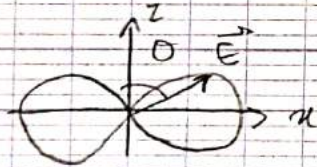
3) Champ de rayonnement

À grande distance \Rightarrow propagation $\Rightarrow r \gg \lambda$

\Rightarrow terme prépondérant \ddot{p}

Approx: Onde plane: $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{k \vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\omega}$

\vec{E} et \vec{B} nul sur l'axe du dipôle



4) Puissance rayonnée

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \propto \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$$

\hookrightarrow rayonnement est nul suivant l'axe du dipôle oscillant et maximal suivant le plan Oxy .

$$P_{\text{ray}} = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{(\ddot{p})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

\hookrightarrow flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface de la sphère.

$\vec{P} \propto \ddot{z}$ \Rightarrow toute charge accélérée rayonne de l'énergie.

• Diffusion Rayleigh : ciel bleu
↳ Application

V) Équations de Maxwell dans le vide

↳ $\vec{\rho}$ et \vec{j} sont maintenant fonction du temps.
et il ne faut pas oublier la conservation de la charge électrique, et l'induction.

• Les équations de Maxwell

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Maxwell-Herz} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

↳ Couplage de \vec{E} et $\vec{B} \Rightarrow$ champ EM.

Les équations de Maxwell sont complétées par la loi de force de Lorentz donnant l'action d'un champ EM sur une charge ponctuelle q animée d'une vitesse \vec{v} .

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Les Eq^o de Maxwell sont linéaires par rapport aux termes sources \vec{j} et ρ .

exemple : \vec{E}_1 et $\vec{B}_1 \Rightarrow \rho_1$ et \vec{j}_1

$$\vec{E}_2 \text{ et } \vec{B}_2 \Rightarrow \rho_2 \text{ et } \vec{j}_2$$

$$\text{↳ } \vec{E} = \lambda \vec{E}_1 + \mu \vec{E}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B} = \lambda \vec{B}_1 + \mu \vec{B}_2$$

↳ Principe de superposition.

• ARQS

↳ Approximation des régimes quasi-stationnaire

Distribution de charge varie très lentement $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$

Donc l'équation conservat° de la charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

flux conservatif

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

↳ le flux de \vec{j} est identique à travers H et H'

Domaine de validité:

Si dans un circuit, un signal électrique périodique de longueur d'onde λ se propage à la vitesse c

entre 2 points PM \Rightarrow il faut que $PM \ll \lambda$

soit $T \gg PM/c$

L'effet de la propagation dans le vide entre P et M est alors négligeable à l'échelle des variations des grandeurs EM.

* \vec{E} et \vec{B} dans l'ARQS

ARQS magnétique

Le champ \vec{B} a à l'instant les mêmes caractéristiques que le champ magnétostat.

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$$

Mais on a:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

↳ existence d'un champ \vec{E}
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ à circuler
non conservatif couplé à \vec{B} .

ARQS électrique

À l'inverse ici pour \vec{E}

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

↳ circulation conservative

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

• Equation de propagation de d'Alembert.

En l'abs de charges et de courants ($\rho=0$ et $\vec{j}=0$), les champs satisfont à l'équation de d'Alembert:

$$\Delta F - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

exemple avec \vec{E} $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

et $\text{div} \vec{E} = 0$
 $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) &= \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) &= -\Delta \vec{E} \\ -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) &= -\Delta \vec{E} \end{aligned}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

⇒ On appelle onde un phénomène physique décrit par la grandeur physique F variant dans l'espace et au cours du temps.

la solution générale $F(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$f(x-ct) \Rightarrow$ onde plane se propageant suivant l'axe Ox positif à la vitesse c .

$g(x+ct)$

↳ c'est des ondes planes progressives.

• OPAM: onde plane progressive monochromatique

$$f(x-ct) = A \cos[k(x-ct) + \varphi]$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ ($k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$) en 3D

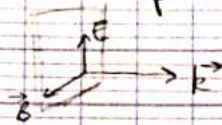
$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$ périodicité temporelle (à x donné)

$\lambda = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$ périodicité spatiale (à t fixé)

→ Fiction car ne prend pas en compte les conditions aux limites + énergie ∞ .

* Ondes planes progressives électromagnétiques (OPPEN)

Avec les équations de Maxwell, on a:



$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Relation de structure de l'OPP.

\vec{E} est transversale ($\perp \vec{k}$)

* Polarisation

↳ dû à l'évolution de la direction du champ \vec{E} au cours de la propagation.

Si $\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

on a $E_y = E_{0y} \cos(\omega t)$

$$E_z = E_{0z} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t)$$

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

$$\sin(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{E_z}{E_{0z}} - \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \cos \varphi$$

$$\cos(\omega t) \sin(\varphi) = \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \sin(\varphi)$$

↳ au carré + addition :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \left(\frac{E_z}{E_{0z}} \right) \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

↳ ellipse \Rightarrow polarisation elliptique

Suivant φ ; la polarisation change

$\varphi = 0$: rectiligne

$0 < \varphi < \pi$: gauche

$\pi < \varphi < 2\pi$: droite

circulaire si $E_{0y} = E_{0z}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$



• **Énergie électromagnétique et vecteur de Poynting**
 le champ EM agit sur les charges et peut leurs transférer de l'énergie.

$$U_{em} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V \cdot d\vec{G}$$

Densité locale d'énergie EM : $U_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$
 l'intégration sur un volume (V) donne la contribution EM à l'E contenue dans (V).

Vecteur de Poynting : $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$
 (aux porteurs de charge) $\Rightarrow P_{cédée} = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV$

$$\frac{dW_R}{dt} = \oint \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad \text{th. de Poynting}$$

puissance rayonnée
 Flux de $\vec{\pi}$ donne l'expression de la puissance transportée par le champ et traversant S

Flux > 0 si transfert de puissance de l'int de (S) vers l'ext.

non conservato de l'énergie en. (conservation $\vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{R}$)

BILAN : $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \frac{\partial U_{em}}{\partial t} = - \vec{j} \cdot \vec{E}$
 *CAS OPPEN

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = - \vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot \vec{R}$$

$$U_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi} = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c} \right) \vec{m} = \left(\frac{c B^2}{\mu_0} \right) \vec{m}$$

↳ dans la direction de propagation

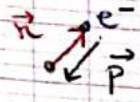
indep de la polarisation

$$\Rightarrow P = \|\vec{\pi}\| S = \frac{dW_R}{dt} = \frac{E^2}{\mu_0} S dt \Rightarrow E \cdot \text{traversant } S \text{ pdt } dt.$$

VI - Ondes EM dans les diélectriques

1) Modèle microscopique

→ Modèle électron élastiquement lié



• noyau fixe

• mvt e⁻ :

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{(-e\vec{E})}_{\text{champ } \vec{E}} - \underbrace{m\omega_0^2\vec{r}}_{\text{force rappel élastiq}} - \underbrace{m\Gamma\dot{\vec{r}}}_{\text{force de frottem}}$$

ω_0 : pulsato caractéristique d'une transition pour l'e⁻ (résonnance)

$$\ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

On suppose: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$

↳ régime sinusoïdale forcé

On cherche: $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$

$$\vec{r}_0 = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}_0$$

Moment dipolaire:

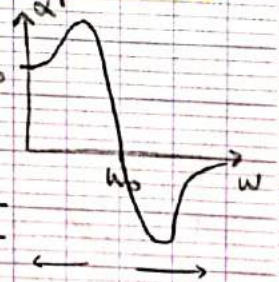
$$\vec{p} = -e\vec{r}$$

$$\vec{p}_0 = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}_0$$

α_0 polarisabilité statique

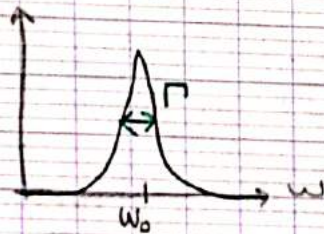
or $\vec{p}_0 = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}_0$ donc $\alpha(\omega) = \frac{e^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$

$$\alpha'(\omega) = \text{Re}(\alpha) = \alpha_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$



dispersion normal

$$\alpha''(\omega) = -\text{Im}(\alpha) = \alpha_0 \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$



⇒ loi de la résonance

↳ polarisation réelle
il n'y a pratiquement pas d'absorption d'énergie par les atomes

Dynamique / non magnétique

2) Equations de Maxwell dans un diélectrique

Hyp. DLHI : milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope.

$\rightarrow j_{libre} = 0$ et $\rho_{libre} = 0$ (si isolant)

* Vecteur polarisation

$$\rho = \rho_{lié} + \rho_{libre} = -\text{div} \vec{P} + \rho_{libre}$$

$$\rho_{lié} = -\text{div} \vec{P}$$

$$j_{lié} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

(variat° de $\vec{P} \Rightarrow$ courants)

$$\vec{j} = \vec{j}_{lié} + \vec{j}_{libre}$$

$$= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{j}_{libre} + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(ici $\vec{A} = 0$)

* Equations de Maxwell

Dans la matière

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{libre} - \text{div} \vec{P})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (j_{libre} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

\rightarrow Diélectrique :

$$\text{div} \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{div} \vec{P}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0$$

\vec{D} : vecteur induction électrique

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dans la matière :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{libre}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + j_{libre}$$

on pose $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{A}$ (ici $\vec{A} = 0$)

\rightarrow vecteur excitat° magnétique

\Rightarrow équations obtenues par un procédé de moyennage spatial $\omega \gg \omega_A$ (il faut ignorer l'échelle atomique)

3) Milieux Diélectriques linéaire

$$\hookrightarrow \vec{P} = \epsilon_0 [\chi] \vec{E}$$

\hookrightarrow opérateur linéaire
Tenseur de susceptibilité électrique
caractéristique du matériau
et son état physique

Si matériau homogène

$\hookrightarrow \chi$ même valeur en tout pt du volume.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

permissivité du matériau

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

\vec{P} et \vec{D} permettent de prendre en compte la réponse du matériau face au champ \vec{E} qu'elle subit.

Relation de proportionnalité entre \vec{E} et \vec{D} si

* Cas dynamique

\S linéaire, donc réponse linéaire : alors en régime champ évolue sinusoidal permanent, \vec{P} et \vec{E} varient à la même pulsation ω , séparé d'un déphasage φ :

champ évolue sinusoidal permanent en temps.
 $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left(\underbrace{\chi'(\omega)}_{\text{terme en phase avec } \vec{E}} \cos(\omega t) + \underbrace{\chi''(\omega)}_{\text{terme en quadrature}} \sin(\omega t) \right) \vec{E}_0$$

soit eq
 $\Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \vec{0}$

On a aussi $\vec{D} = [\epsilon' \cos(\omega t) + \epsilon'' \sin(\omega t)] \vec{E}_0$

Rmq: Pour décrire la réponse de la matière à un champ \vec{E} variable, il faut $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega) > 0$

lié à l'absorption
dissipation d'E
par le diélect.

\oplus χ_{stat} doit être retrouvé aux faibles fréquences:

$$\chi_{\text{st}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \chi'(\omega) \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \chi''(\omega) = 0$$

En complexe : $\underline{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$

$$\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega)$$

4) OPPM : onde plane progressive monochromatique

Cherchons des sol^s monochromatique, ω propageant dans la direction \vec{u} : $\vec{k} = k\vec{u}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k\vec{u}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(k\vec{u}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \mu_0 \epsilon \vec{E}$$

\vec{B} et $\vec{E} \perp \vec{u}$

\vec{u}, \vec{E} et \vec{B}
forme un trièdre direct

Relation de dispersion

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$-\omega \mu_0 \epsilon \vec{E} = \frac{k^2}{\omega} (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}))$$

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon \vec{E} = k^2 \left((\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{E} \right)$$

$= 0$

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon = k^2$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon}{\epsilon_0 c^2}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_r}{c^2}$$

* Indice réel : milieu non absorbant

$$k = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r(\omega)}}{c}$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{c}{v_{ph}} = \sqrt{\epsilon_r} = n(\omega)$$

↳ OPPM ω propage sans absorpt^o dans le milieu avec v_{ph} dép de ω .

*

cas onde évanescente

* **Indice complexe: milieu absorbant**

$$\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon' + i\epsilon''$$

$\epsilon'' > 0 \rightarrow$ aaduit phénomène d'absorp^o
(si $\epsilon'' < 0$: amplificat^o)

donc $k = k' + ik''$
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{i(k' r - \omega t)}$

\hookrightarrow atténuat^o exponentielle de l'amplitude de l'onde lors de la propagation

$$\epsilon_r = n^2 = ((n') + i n'')^2 \Rightarrow k' = n' \frac{\omega}{c} \text{ et } k'' = n'' \frac{\omega}{c}$$

$$e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} = e^{-\frac{n'' \omega r}{c}} \Rightarrow n'' : \text{indice d'extinct^o}$$

* **Aspect Energétique de la propagation - Vecteur de Poynting**

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

\rightarrow Milieu non absorbant

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} c n \epsilon_0 E_0^2 \vec{u}$$

\rightarrow Milieu absorbant

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c n' \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} e^{-2n'' \frac{\omega}{c} r} \vec{u}$$

décroissance exponentielle

4) Réflexion sur un diélectrique

Relat^o de passage entre 2 diélectriq^s

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T2} &= \vec{E}_{T1} \\ \epsilon_r \vec{E}_{N2} &= \epsilon_r \vec{E}_{N1} \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_1 \end{aligned}$$

* **Snell-Descartes**

$$a_1 e^{i(k_1 \vec{r} - \omega_1 t)} + a_1' e^{i(k_1' \vec{r} - \omega_1 t)} = a_2 e^{i(k_2 \vec{r} - \omega_2 t)}$$

$$a_1 + a_1' e^{i[(k_1' - k_1) \vec{r} - (\omega_1' - \omega_1) t]} = a_2 e^{i[(k_2 - k_1) \vec{r} - (\omega_2 - \omega_1) t]}$$

Relat^o valable qql soit t: $\omega_1' = \omega_1 = \omega_2$

et les facteurs de phase:

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_1') \cdot \vec{n}_A \quad \text{et} \quad (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{n}_A \quad \text{soit est et indep de A}$$

En 0 :

$$(\vec{E}_1 - \vec{k}_1) \vec{n}_0 = 0$$

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{n}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{k}_1' - \vec{k}_1 = \alpha \vec{N} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \beta \vec{N}$$

⇒ les 3 vecteurs d'onde dans le plan d'incidence

$$\vec{k}_1' \cdot \vec{T} = \vec{k}_1 \cdot \vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 \cdot \vec{T} = \vec{k}_1 \cdot \vec{T}$$

$$\sin(i_1') = \sin(i_1)$$

$$i_1' = i_1$$

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

loi Snell-Desc.
très valable
pt \vec{k}

(m dans les milieux anisotropes)
mais pas forcément
avec les rayons.

* coeff réflexion et réfraction

À l'interface: $\vec{B}_1 + \vec{B}_1' = \vec{B}_2$ et $\vec{E}_1 + \vec{E}_1' = \vec{E}_2$

$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}_1) \quad \vec{B}_1' = -\frac{n_1}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}_1')$$

$$\vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}_2)$$

$$n_1 \vec{u} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_1') = n_2 \vec{u} \wedge \vec{E}_2$$

$$n_1 (\vec{E}_1 - \vec{E}_1') = n_2 \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_1 = r \vec{E}_1 \quad \vec{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}_1 = t \vec{E}_1$$

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

→ milieu non absorbant

$$\vec{R}_1 = c n_1 \epsilon_0 \vec{E}_1'^2 \vec{u} \quad \vec{R}_1' = -c n_1 \epsilon_0 \vec{E}_1'^2 \vec{u}$$

$$\vec{R}_2 = c n_2 \epsilon_0 \vec{E}_2^2 \vec{u}$$

$$\frac{P_{refl}}{P_{inc}} = R = \frac{E_1'^2}{E_1^2} = r^2 \quad \text{et} \quad \frac{P_{tran}}{P_{inc}} = T = \frac{n_2 t^2}{n_1}$$

$$R + T = 1$$

↳ conservation de l'énergie

- revoir formule

→ très utile: guide, micro-onde
+ connaître propriétés matériaux

VII - Ondes EM dans un métal

1) Modèle microscopique

Conducteur \Rightarrow milieu contenant des charges libres,
qui sont insensibles au terme de force de rappel $k=0$
or $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} + \Gamma \dot{\vec{r}} = -\frac{e}{m} \vec{E} \quad \text{avec } \Gamma = \frac{m}{\tau}$$

$$\hookrightarrow \dot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{A} e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{e\tau}{m} \vec{E}}_{\text{régime permanent}}$$

* En régime permanent: $\dot{\vec{r}} = \frac{e\tau}{m} \vec{E}$

\hookrightarrow la vitesse des charges de conducto $\propto \vec{E}$.

$$\vec{j} = ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

* En régime dynamique

Pour un conducteur dit parfait

$$\underline{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2\tau/m}{1-i\omega\tau} = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)$$

2) Equations de Maxwell dans un métal

$$\vec{j} = \underline{\sigma}(\omega) \vec{E}$$

Cas diélectrique: $\vec{j} = \sigma'(\omega) \vec{E} + \sigma''(\omega) \vec{E}$
 $= \underbrace{\sigma'(\omega) \vec{E}}_{\text{en phase}} + \underbrace{i\omega\epsilon_0\chi' \vec{E}}_{\text{en quadrature}}$

$$\vec{j} = \sigma' \vec{E} + \chi' \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$$

$\vec{j}_{\text{en phase}} \Rightarrow$ caractère conducteur

$\vec{j}_{\text{quad}} \Rightarrow$ caractère isolant

$$\text{on } \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} = \underbrace{\sigma' \vec{E}}_{\text{jcond}} + \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{jdiel}}$$

On compare les 2 comportements :

$$\frac{j_{\text{cond}}}{j_{\text{lep}}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

$\omega \ll \sigma/\epsilon$: conducteur
 (On negl. $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$)
 $\omega \gg \sigma/\epsilon$: isolant \rightarrow ARQS

Souvent σ et ϵ sont fixe dans un matériau.

ω (basse freq) \Rightarrow cond.

ω (haute freq) \Rightarrow isolant

* neutralité électrique

Comment varie dans le temps la charge volumique ?

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad \text{et } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho(t=0) e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$$\tau = \epsilon_0 / \sigma \Rightarrow \omega_p: \text{fréquence plasma} = \sqrt{\frac{ne^2}{m \epsilon_0}}$$

Cu: $\tau = 4 \cdot 10^{-14} \text{ s} \Rightarrow$ très rapidement le conducteur devient neutre en volume.
 $\rightarrow \rho(t) = 0$

* Equation Maxwell

Dans le cadre de l'ARQS, on neglige le tps de propagat° du signal devant celui du δ : $\omega \ll 1/\tau$

$$\text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$$

(dans les conducteurs)
 on negl. $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

* Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\epsilon} = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \underline{\chi}) \quad \underline{\chi} = \frac{\sigma}{i \omega \epsilon_0}$$

$$\underline{\epsilon} = 1 + \frac{\frac{\omega_p^2}{\pi n i \omega}}{i \omega} = 1 - \frac{(\omega_p / \omega)^2}{1 + \frac{1}{i \omega \tau}}$$

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{1}{i \omega \tau}} \right)$$

* Différents régimes

• $\omega \ll \omega_p$: fréquences "faibles"
 $\ll 1/\delta$ (cu $f < 10^{13}$ Hz)

$$k^2 = \frac{(1-i)^2}{\delta^2}$$

$$k = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \sigma \omega}}$$

↳ épaisseur de peau

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

atténuation propagation

↳ l'onde ne pénètre dans le milieu que sur une épaisseur de $q| \delta$.

• $\omega \gg 1/\delta$

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

* si $\omega < \omega_p$: $k = k'' \Rightarrow$ imaginaire pur

↳ onde évanescente

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k'' x} e^{i \omega t}$$

↳ phénomène produit par radiat° visibles ($\sim 10^{15}$ rad/s)

↳ éclat métallique

* si $\omega = \omega_p$: onde plasma : oscillat° de la densité de charges
 plasma = milieu conducteur et le temps de réaction est très grand.

* si $\omega > \omega_p$: k : réel pur

$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

↳ l'onde ne subit pas d'absorption : le milieu est transparent.

• $\omega \gg \omega_p$

$$\left. \begin{array}{l} v \rightarrow c \\ \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \end{array} \right\}$$

le milieu se comporte comme le vide.

IX) Guides d'ondes

↳ Fait ressortir le rôle joué par les C.L. imposés par le conducteur parfait.

• Principe du guide d'onde

Guide d'onde \Rightarrow "canalisation" métallique soit vide, soit rempli d'un diélectrique où se propagent des ondes électromagnétiques. (domaine radio-fréquence) de sorte que leur énergie ne se disperse pas dans l'espace.

• Au sein d'un conducteur parfait, $\vec{E} = 0$ et $\vec{B} = 0$, avec les relations de continuité $\vec{E}_{\text{tang}} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{\text{normal}} = \vec{0}$ dans le guide.

• Interface entre 2 diélectriques ($n_1 > n_2$) et ($\theta_i > \theta_e$)

↳ Pour avoir des réflexions totales.

• Les modes de propagation

$\vec{a} = (\Delta x) \vec{e}_x + (\Delta y) \vec{e}_y + (\Delta z) \vec{e}_z$
 $\vec{E} = (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z) e^{j(\omega t - kz)}$: hyp. propagés suivant z

$$\Delta \vec{E} = \left(\frac{\partial^2 E_{0x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{0x}}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + (\dots) \vec{e}_y + (\dots) \vec{e}_z$$

Si \vec{E} ne dépend que de E_{0z} , on a et $E_{0z}(x, y)$

$$\frac{\partial^2 E_{0z} e^{j(\dots)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z} e^{j(\dots)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{0z} e^{j(\dots)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (E_{0z} e^{j(\dots)})}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} - k^2 E_{0z} + \frac{\omega^2}{c^2} E_{0z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{0z} = 0$$

↳ Eq^o d'Alembert : peut se simplifier facilement avec les conditions initiales et les modes.

$$k^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2}$$

→ Mode transversal électrique TE

↳ $\vec{E} \perp$ à la direction de propagation.
donc transversal : $E_{0z} = 0$

→ Mode transversal magnétique TM

↳ $\vec{B} \perp$ à la direction de propagation donc
transversal : $B_{0z} = 0$

Par superposition, on a la somme d'un mode TE
et d'un mode TM.

→ Mode transversal électromagnétique (TEM)

↳ mode pour lequel B_{0z} et E_{0z} sont nuls
pour cela il faut que $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

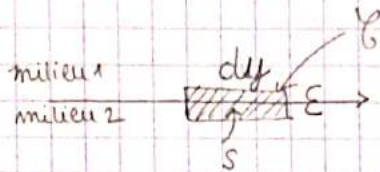
Si le mode TEM est compatible avec la géométrie
du guide, alors propagation sans dispersion
à la vitesse c . (il faut pas que le ... soit creux).
↳ câble coaxial a des modes TEM

Propagation guidée

Cadre: onde EM dans un conducteur parfait creux de section constante, invariant dans la direction z.

1) Conditions limites

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= (E_{1||} - E_{2||}) dy \\ &= -\frac{\partial B}{\partial t} dy \rightarrow 0 \quad \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Par contre on peut avoir discontinuité de E_{\perp} et $B_{||}$.

↳ preuve de la condition $E_{||}$ continue à une interface quelconque.
De même B_{\perp} continu.

• On s'intéresse à $E_{||}$ à la surface d'un conducteur de conductivité σ .

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E} \text{ en volume} \\ &\rightarrow \text{à modifier à la surface: } \begin{cases} \vec{j}_{\perp} = 0 \text{ (imp de } e^- \text{ de sortie ou rentrée du métal)} \\ \vec{j}_{||} = \sigma \vec{E}_{||} \end{cases} \end{aligned}$$

Une énergie dissipée dans un métal conducteur:

$$\begin{aligned} \text{↳ } \vec{j} \cdot \vec{E} &\sim \frac{j^2}{\sigma} \Rightarrow \text{ne diverge pas (car énergie)} \\ j &\sim \sqrt{\sigma} \end{aligned}$$

conséquence $E_{||} = \frac{j_{||}}{\sigma}$ au pire comme $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \rightarrow 0$ si σ diverge alors max j $\sim \sqrt{\sigma}$ parce que énergie ne diverge pas.

↳ Nous avons montré que $E_{||} = 0$ à la surface d'un milieu au contact d'un conducteur parfait.

• On cherche à en déduire une condition sur B_{\perp} .

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{vmatrix}$$

si $\vec{n} = \vec{e}_x$; $E_y = E_z = 0$

↳ $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$

La composante dynamique $B_{\perp} = 0$.

2) Ondes propagatives

Par définition, une onde qui se propage en direction +z est de la forme $f(z - vt)$.

Dans notre cas, on est dans un espace 3D:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) f(z - vt)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0(x, y) g(z - vt)$$

On impose de plus que l'onde est générée par une excitation à fréquence ω en entrée.

Par linéarité du problème, cela impose: $f(z - vt) = e^{i(kz - \omega t)}$

E_0
d'Alembert

$$kz - \omega t = k(z - vt) \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

On construit maintenant des équations sur E_0 et B_0 .

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

($\vec{j} = 0$ dans le guide)
de la vide

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$\text{div} \vec{E} = 0$
 $\text{car } \rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \epsilon_0 \mu_0 \quad \text{dans le vide}$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq° d'Alembert}$$

on injecte la forme choisie

$$\Delta E_{0x}(x, y) - k^2 E_{0x} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_{0x}$$

Pareil pour E_{0y} et E_{0z} , $B_{0x, y, z}$.

3) Résolution complète dans le cas de 2 plans //.



la condition est $E_{||} = 0$ aux bords et $B_{\perp} = 0$

- les solutions $\vec{E}_{||}$ à \vec{u}_x sont non impactées \rightarrow problèmes faciles
- on s'intéresse à la famille \vec{E} selon \vec{u}_y

On cherche si il existe des solutions sous la forme :

$$\vec{E}_0 = E_0(x) e^{i(kz + \omega t)} \quad (\text{solutions transverses électriques})$$

Eq° d'Alembert: $\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - k^2 E_0 = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \Rightarrow$ voir détails leçon 27 (Hermann)

① soit $k = \frac{\omega}{c}$: $\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow$ cas linéaire

or $E_0(0) = 0$ et $E_0(a) = 0 \rightarrow E_0 = \alpha x + \beta$

Pas de solution possible : $\alpha = \beta = 0$

② $k > \frac{\omega}{c}$ \rightarrow à montrer : pas de solutions possibles
 $E_0'' - k^2 E_0 = 0 \quad \Delta > 0$
 $E_0(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x} \quad A = B = 0$

③ $k < \frac{\omega}{c}$; on pose $d^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ (d réel)

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + d^2 E_0 = 0$$

$$E_0 = \alpha \cos(dx) + \beta \sin(dx)$$

$$E_0(0) = 0 = \alpha$$

$$E_0(a) = 0 = \beta \sin(da)$$

$$da = n\pi \Rightarrow d = \frac{n\pi}{a}$$

($\beta \neq 0$)
 n entier $\neq 0$
 (positif)

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \frac{n\pi}{a}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega^2}}} > c \text{ avec } \omega_0 = \frac{n\pi c}{a}$$

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$

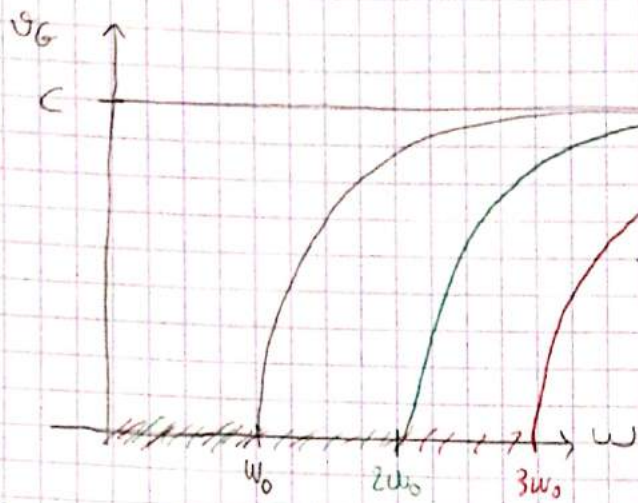
pour le calculer, le plus efficace est d'utiliser :

on diff. $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$

$$2k dk = 2\omega d\omega$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = c^2 \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$$

$$v_G = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega^2}} < c$$



Rmq : chaque valeur de n correspond à $v_G(n=1)$, $v_G(n=2)$ un mode. $v_G(n=3)$

$$v_G(n=1) = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

$$v_G(n=2) = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

4) Structure des modes obtenus.

Avec la famille que l'on s'est imposé ($\vec{E}_0 = E_y(x) \vec{u}_y$)

$$\vec{E}_0 = \sum_{n \geq 1} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(k_n z - \omega t)}$$

Calculons \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\partial_z E \\ 0 \\ \partial_x E \end{pmatrix}$$

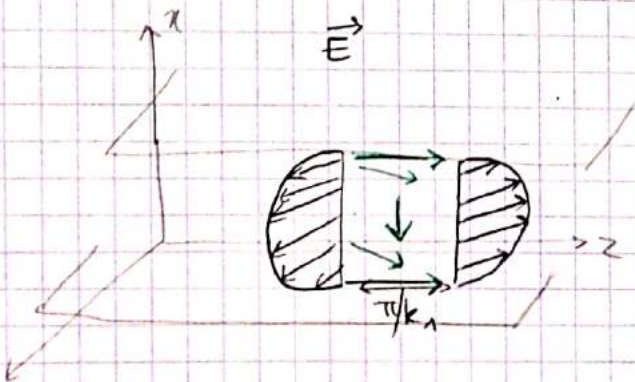
$$i\omega B_{x,n} = -E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) k_n e^{i(k_n z - \omega t)}$$

$$B_{x,n} = -\frac{k_n}{\omega} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(k_n z - \omega t)}$$

$$i\omega B_{z,n} = E_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{a}\right) e^{i(k_n z - \omega t)}$$

$$B_{z,n} = -i \frac{n\pi}{a\omega} E_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(k_n z - \omega t)}$$

$n=1$



Conclusion et généralisation :



coaxiale structure avec $B_z = 0$ et $E_z = 0$ possible.

Dans un conducteur parfait creux, les ondes planes ne peuvent pas se propager dans la direction z (cas $n^o 1$) $B_z \neq 0$ $E_z \neq 0$ sauf si le contenu n'est pas connexe.

- les ondes peuvent se décomposer en 2 familles :
- transverses électrique (notre exemple) qui ont $B_z \neq 0$
 - transverses magnétiques ($E_z \neq 0$, $B_z = 0$)

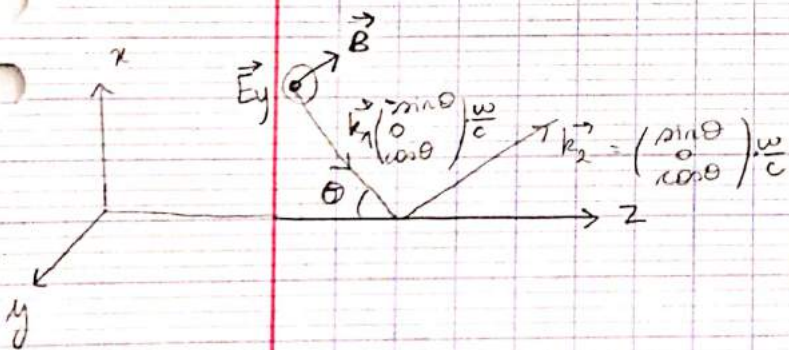
Dans chacune de ces familles, les vitesses de propagation possibles sont données par une liste discrète : $v_n = \frac{\omega}{k_n}$ n entier

En général, on utilise 2 indices n, m ce qui est plus pratique.

Chacune est associée à une structure d'onde le mode n (ou (n, m))

Rmq : la liste des k_n^{TE} diffère (sauf coïncidence) des k_n^{TM}

Pour certaines valeurs de ω , la liste des k_n peut être vide ; pour $\omega < \omega_0$ pas de mode
 \hookrightarrow fréquence de coupure



on suppose $E_x = 0$ par commodité

on se donne $\vec{E}_i = E_{y_i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$
 $\|\vec{k}\| = c\omega$ car onde plane.
 E_y constante

il y a réflexion sur le conducteur ce qui assure $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)_{\parallel} = 0 \quad \forall (z, t)$

$$\vec{E}_1 = E_{y_1} e^{i\left(-\frac{\omega}{c} \sin\theta x + \frac{\omega}{c} \cos\theta z - \omega t\right)}$$

$$\vec{E}_2 = E_{y_2} e^{i\left(\frac{\omega}{c} \sin\theta x + \frac{\omega}{c} \cos\theta z - \omega t\right)}$$

$$(E_1 + E_2)(x=0) = E_{y1} e^{i(\frac{\omega}{c} \cos \theta z - \omega t)} + E_{y2} e^{i(\frac{\omega}{c} \cos \theta z - \omega t)} = 0$$

$$E_{y1} = -E_{y2} = E_y$$

Si on impose en plus $E_y = 0$ en $x = a$

$$E_y \left[e^{-i(\frac{\omega}{c} \sin \theta a)} - e^{i(\frac{\omega}{c} \sin \theta a)} \right] e^{i(\frac{\omega}{c} \cos \theta z - \omega t)} = 0$$

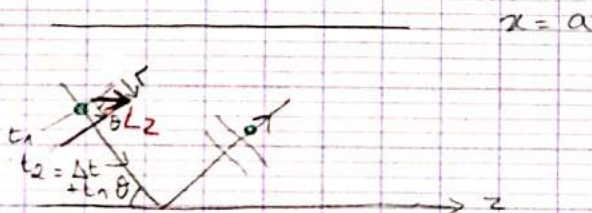
$$\sin\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta a\right) = 0$$

$$\sin \theta a \frac{\omega}{c} = n\pi$$

$$\sin \theta = \frac{n\pi c}{\omega a}$$

On a finalement construit la superposition d'ondes planes pour respecter les conditions aux limites. (Une onde plane seule ne respecte pas les conditions aux limites).

vitesse de phase: vitesse de déplacement d'une crête dans la direction de propagation en z .



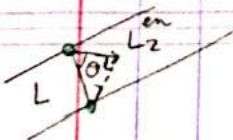
$$\frac{L}{\Delta t} = c$$

$$L_2 \cos \theta = L$$

$$L_2 = \frac{c \Delta t}{\cos \theta}$$

$$v_p = \frac{L_2}{\Delta t} = \frac{c}{\cos \theta} > c$$

• vitesse de groupe on suit le chemin parcouru par 1 point du plan d'onde.



$$v_{en} = \frac{L_2^{en}}{\Delta t} = \frac{L \cos \theta}{\Delta t} ; L_2^{en} = L \cos \theta$$

LP27 : Propagation guidée des ondes

- * Electro - Pérez
- * Electro n°1 - Dion
- * BUP n°742

Niv. licence

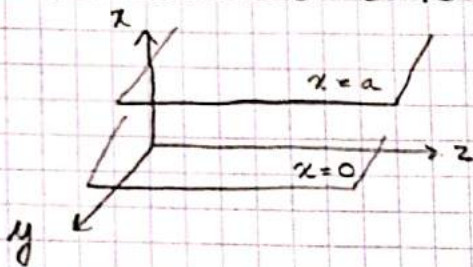
- Pré-requis :
- équations de Maxwell
 - équations de d'Alembert
 - propagation OEM vide

Introduction :

→ Intérêt

2 - Propagation d'une onde entre 2 plans conducteurs

1) Structure de l'onde



- source à la pulsation ω
- propagation selon z

$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \exp(j(kz - \omega t))$
 (solution transverse électrique)

- Conducteurs parfaits
- $\vec{E}_{\parallel} = 0$
- $B_{\perp} = 0$

• invariance selon y : $\vec{E} = \vec{E}_0(x) \exp(j(kz - \omega t))$

• $\parallel \vec{u}_z$: $\vec{E} = E_m \exp(j(kz - \omega t)) \vec{u}_z$

$\vec{B} \parallel \vec{u}_y$ \rightarrow Mode TEM

(car $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} = 0$)

(inintéressant de faire l'analyse suivant u_y)

• $\parallel \vec{u}_z$: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
 $j k E_0 = 0$ or $k = k u_z$ donc $\vec{E} = E u_y$

donc $\vec{E} = E_0(x) \exp(j(kz - \omega t)) \vec{u}_y$

Eq d'Alembert : $\frac{d^2 E_0}{dx^2} - (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) E_0 = 0$

2) Résolution

• Cas n°1 $k = \frac{\omega}{c}$ $E_0''(x) = 0 \rightarrow E_0 = Ax + B$

C.L $\begin{cases} E_0(0) = 0 \\ E_0(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

$E_0 = 0$

• Cas n°2 $k > \frac{\omega}{c}$ $\mu^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$

$E_0'' - \mu^2 E_0 = 0 \rightarrow E_0(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}$

C.L $\begin{cases} E_0(0) = 0 \\ E_0(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

§ Cas n° 3 : $k < \frac{\omega}{c}$ $\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

$E_0'' + \mu^2 E_0 = 0$ $\rightarrow E_0(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$

$\Omega \begin{cases} E_0(0) = 0 \\ E_0(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\mu a) = 0 \end{cases}$

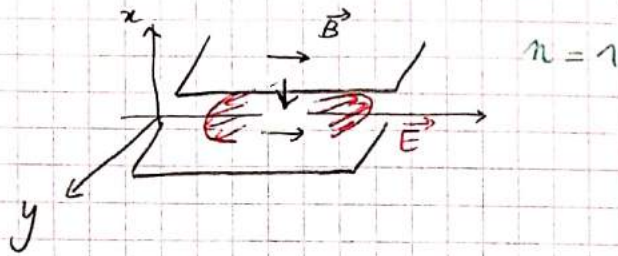
Pour $n \geq 1$; $\mu a = n\pi$

$\vec{E} = \sum_{n \geq 1} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp(j(kz - \omega t)) \cdot \vec{e}_y$

$\vec{B} = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} -\frac{k_n}{\omega} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp(j(kz - \omega t)) \\ 0 \\ -\frac{jn\pi}{a\omega} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp(j(kz - \omega t)) \end{pmatrix}$

- Mode TE
chaque n, TE_n

- Mode TM



3) Relation de dispersion

$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$

$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2 \pi^2}{a^2 \omega^2}}$

$\omega_0 = \frac{c\pi}{a}$

$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$

$1 - n^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 0 \Rightarrow \omega > n\omega_0$

$\omega_c = n\omega_0$
 \rightarrow fréq de coupure

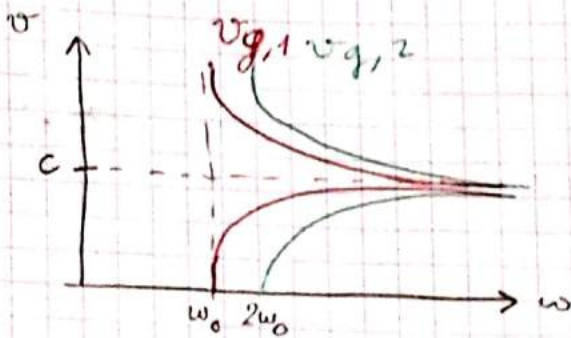
En terme de longueur d'onde : $\lambda = \frac{c}{\omega_0} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\omega}$

$\frac{1}{\lambda_{g,n}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda_0^2}$

4) vitesse de phase / groupe

$v_{p,n} = \frac{\omega}{k_n} = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} > c$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \lambda k dk = \lambda \omega d\omega \Rightarrow v_g = \frac{k c^2}{\omega} = c \sqrt{1 - n^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} < c$



qd $\omega \nearrow$
superposition de
mode dans la
cavité

$n=1$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}_n \vec{B}_n^*}{\mu_0} = \left(\frac{E_n B_n^*}{\mu_0} \right) \vec{u}_x - \left(\frac{E_n B_n^*}{\mu_0} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{R} = \text{Re} \left(\frac{i \omega \vec{B}_n^*}{\mu_0} \right)$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{T} \text{Re}(\vec{R}) = A \vec{u}_z$$

5) interprétation ondes planes

$$\vec{E} = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \exp(j(kz - \omega t)) \vec{u}_y$$

$$\vec{E} = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y$$

$$= E_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{a}x + kz - \omega t\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{a}x + kz - \omega t\right) \right) \vec{u}_y$$

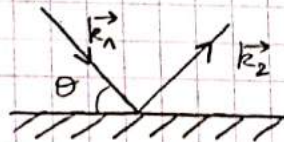
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_1 = \frac{n\pi}{a} \vec{u}_x + k \vec{u}_z \\ \vec{k}_2 = -\frac{n\pi}{a} \vec{u}_x + k \vec{u}_z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 = E_n \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{E}_2 = E_n \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t) \end{array} \right.$$

- même composantes // \vec{u}_z
- composantes signe opposés // \vec{u}_x

↳ réflexion conducteur parfait



II- Guide d'onde rectangulaire

1) modes présents



Pour $n, m \geq 0$ entiers ;

$$k_{n,m}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2}$$

en longueur d'ondes :

$$\frac{1}{\lambda_{G,n,m}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2} \right)$$