LP 30 : Rayonnement dipôle électrique

Roland POYAC - Agrégation Rennes

Novembre 2019

Niveau : CPGE
Pré-requis : Equation de Maxwell, vecteur de Poynting, Potentiel électrostatique, Jauge de Lorentz, potentiel retardé.

1 Modèle du dipôle oscillant

1.1 Dipôle et approxiamtion

NB : Refaire le schéma
Soit un dipôle ON de charge -q en O et q en N, $\mathbf{P} = q.e^{j\omega t}.\mathbf{ON}$
Etudions le champ à un point M.
Approximations :
1. Dipolaire : $ON << r = OM$
2. Non relativiste : $v << c$ ($\frac{MN}{C} = \frac{r}{c}$)

1.2 Potentiel vecteur, scalaire

Cette partie est longue et calculatoire, il vaut mieux la mettre en pré-requis mais les résultats sont important pour la suite.
On utilise MT et MF :
$div(\mathbf{B}) = 0$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
On pose la jauge de Lorentz :

$$div(\mathbf{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

On obtient les potentiels retardés scalaires et vecteurs :

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_D \frac{\rho(P, t - \frac{r}{c})}{PM} d\tau$$

$$\mathbf{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \frac{\mathbf{j}(P, t - \frac{r}{c})}{PM} d\tau$$

Après résolution :

$$\mathbf{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\dot{\mathbf{P}}(P, t - \frac{r}{c})$$

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{j\omega}{rc}\right)\mathbf{P_0}e^{j(\omega t - kr)}\mathbf{e_r}$$

1.3 Champs E et B

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(V) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2j\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta.\mathbf{e_r} + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{j\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{rc}\right)\sin\theta.\mathbf{e_y}\right] \times \mathbf{P_0} e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{rc}\right)\sin\theta \; P_0 e^{j(\omega t - kr)}.\mathbf{e}_\phi$$

1.4 Rayonnement, Puissance rayonnée

On pose $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$
On défnit la zone de rayonnement $|\mathbf{ON}| << \lambda << r$
Le vecteur de Poynting : $\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}$
Et donc :

$$dP_{ray} = \mathbf{\Pi}.dS\mathbf{e_z}$$

$$\frac{dP_{ray}}{d\Omega} = \frac{P^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}$$

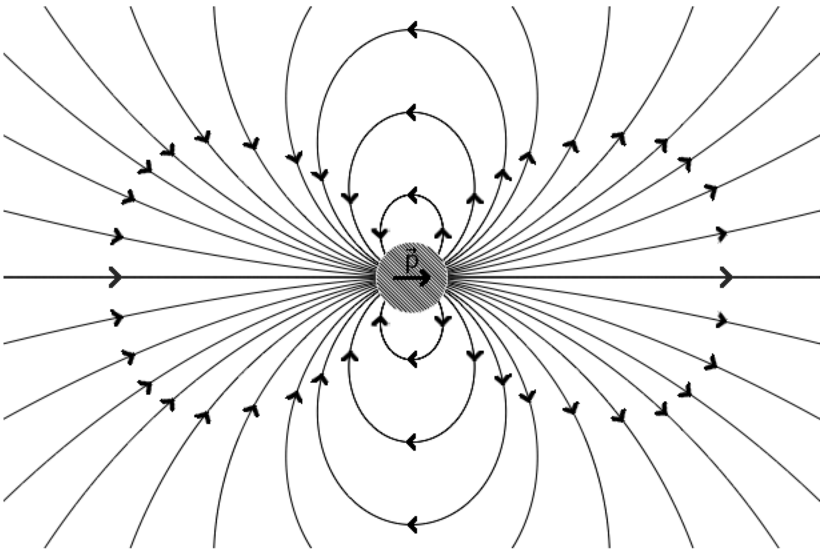

Figure 1 – Lignes de champ du rayon électriques d'un dipôle de moment $\mathbf{P}$

En intègrant :

$$P_{ray} = \frac{\ddot{P}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

On retrouve alors la formule de Larmor.

2 Application : Antenne demi-onde

NB : On peut aussi choisir de faire la diffusion de Rayleigh.
Soit un courant $i(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t)$
Pour un dipôle : $dp = \frac{di}{dt} dz$ On se place à un point M tel OM » L
On obtient finalement :

$$< P >= \frac{1,22 \mu_0 c ß_0^2}{4\pi} = \frac{R_M I_0^2}{2}$$

Avec $R_M = 73,1\ \Omega$ La résistance magnétique.
On note que le rapport puissance magnétique sur puissance électrique donne : $\frac{P_M}{P_E} = 1\%$

3 Questions

- Manque d'ordre de grandeur : par ex $\lambda_{smartphone} \approx$ *dizaines de cm*
- Pourquoi ces approximations (1.1), quand sont-elles valables ? Explication approx 2. : Au moment où on observe, on ne voit pas la différence entre l'information en M et celle en O.
- Pourquoi l'utilisation d'une jauge et pourquoi Lorentz ? Problème d'indétermination de jauge (cte qui ne change pas le résultat physique), Lorentz simplie les équations de propagations.
- Que se passe-t-il pour un développement multipolaire ? $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\mathbf{X_i M}}$
- Pourquoi étudier le dipôle ? C'est le modèle le plus simple capable de créer un champ.