Leçon n°8 : Notion de viscosité, écoulement visqueux

Niveau	**Licence**
Prérequis	Approximation des milieux continus Dérivée particulaire Statique des fluides
Biblio	J'intègre : PC, Dunod Hydrodynamique physique Guyon
Plan	I. <u>Viscosité des fluides</u> 1. Expérience 2. Viscosité dynamique 3. Fluide Newtonien 4. Equivalent volumique de la force viscosité de cisaillement : l'équation de Navier Stockes II. <u>Régimes d'écoulements</u> 1. Transport diffusif de mouvement a. Equation de diffusion b. Vecteur densité de courant de diffusion c. Temps caractéristique de diffusion 2. Transport convectif de quantité de mouvement 3. Nombre de Reynolds III. <u>Couette plan</u> a. Champ des vitesses b. Conditions limites

Remarques :

Ecourter l'exemple si plus de temps
Attention niveau sonore !
Pas de bleu ou rouge !
En intro choix pédagogique
Sympa mais compliqué de suivre l'ensemble des dates.
L'expérience bien mais explication attention car les deux bords entre en jeu. Petite quantité pour que ce ne soit que le fond qui emporterait. Particule plus proche des deux bords sont emportées en premier.
Uniquement fluide newtonien.

Questions :

- *Pourquoi Navier Stokes aussi bas alors qu'utiliser plus haut ?*
  Le mettre en grand deux, car le reste sont des simplifications, permet d'avoir l'exemple puis cas général.

- *Commentaire physique sur le Pa.s pour donner un sens aux valeurs ?*
  Par exemple, eau et mille fois plus visqueux que l'air, eau tourne plus rapidement que l'air.

- *Définition fluide newtonien ?*
- *Introduction du taux de cisaillement pourquoi ?*
  Écriture général des forces. Pas besoin d'en parler car c'est la même chose avec la forme non général quand on dit état cst.

- *Exemples de fluide non newtonien ? Dentifrice, maïzena. Non linéaire. Fluide réoépaississant ou réofludifiant.*

- *De quoi dépend éta s'il n'est pas constant ? Comment varie éta ?*
  Vitesse ou force.

- *Avec l'équation de diffusion on peut avoir quelque chose de réversible : gysérine entre deux cylindres avec de l'encre. Est-ce réversible ou non sachant que c'est une équation de diffusion ?*

Deux solutions négative et positive. Réversibilité cinématique et non d'un point de vue thermodynamique. Car l'opérateur a apporté de l'énergie dans les deux sens. Si ça avait été réversible il aurait fallu que l'énergie lui sois restitué. Il faut changer les conditions initiales.

- *C'est quoi la définition du transport convectif ? v.gard v, associé*

- *Si on applique cette équation à des ondes sonores que se passe t-il ?*
  Il manque un terme dans NS qui prend en compte la viscosité. Autrement NS ne permet par de décrire l'atténuation des ondes sonores.

- *Champs de vitesses dans une OPPM ? Mouvement particule de fluide ?*

u=a cos(wt-kx)ux

- *Mettre une image des évolutions des écoulements en fonction du nombre de Reynolds.*

A faible Re -> écoulement visqueux. Plus c'est visqueux plus les déformations s'étendent loin.
Allé de Van der mal à partir d'un certain nombre de Reynolds

Puis régime très turbulent : a un moment elle remonte dans la couche limite qui diminue la turbulence totale.

- *Importance de la forme du Re ?*
- *Pourquoi limite à 2000 ? Uniquement pour une forme. Principe de similitude.*
- *C'est quoi le principe de similitude ? Re très puissant pour une forme donné, pour cette forme décrit totalement par Re.*
- *Différence entre le comportement laminaire visqueux et laminaire parfait ?*
- *Où intervient la couche limite ? Terme en eta laplacien non négligeable pour grand Re alors on coupe -> couche limite*

Foy aile sous l'eau

- *Peut-on parler de couche limite si on est dans le régime visqueux ? Tout le fluide devient la couche limite car éta laplacien est prépondérant.*

- *Application couette plan ? Invariance et symétrie, hyp sys infini. Invariance par translation Ux et uz -> p(y) et v(y). Plan antisymétrique en yz, v est perpendiculaire donc en ux. v(M,t) = vx(y,t)ux*
- *Que se passe t-il si on prend une vitesse de la plaque qui oscille ?*

(v.grad)v = 0 -> mu dv/dt = eta laplacien de v. Champ ressemble a un adn. Retrouve l'effet de peau.

LP _ Notion de viscosité, écoulement visqueux.

Intro : Irrigat° culture -6500) théorisat° :
Archimède (3e) → statiq des fluides
15e s conservat° de la masse Léonard de Vinci
Simon Stevin hydrostatiq 16e-17e.
18e Euler → fluide parfait incompressible
Navier → 19e → viscosité
viscosité : les forces visqueuses ⇒ frottem^ts internes au sein du fluide
Non nulle ⟺ gradient de $\vec{v}$. À l'origine de la dissipat° d'E^ie
lorsqu'1 fluide s'écoule.

I) Viscosité des fluides

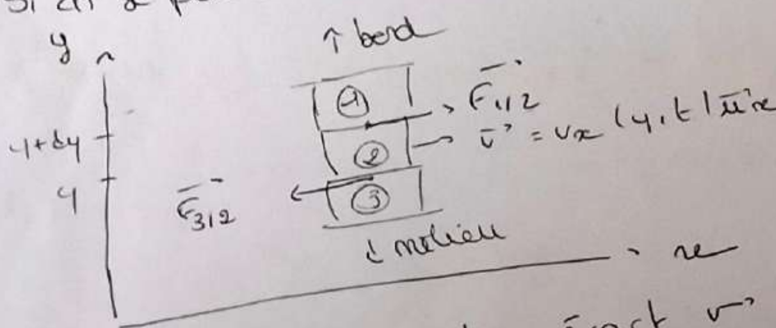
1) Expérience.

Au bout t : Bord ≠ fond.

Au bout de t, fluide → mvent, ∅ immédiat.
Si aucune force ne s'applique, ∅ de raison qu'il se mette en mvent.
→ force tangentielle de cisaillem^t à l'origine du mvent de proche en proche.

2) Viscosité dynamiq.

écoulem^t de cisaillement → clp des $\vec{v}$: $\vec{v}(x,t) = v_x(y,t)\vec{u_x}$
La $\vec{v}$ varie spatialem^t ds une dir° ⊥ à son orientat°.
Si on se place en hauteur : (vu d'en haut)



force de cisaillem^t : écart $\vec{v}$ ≠ 2 particules q̄ interagissent ainsi q̄ leur surface de contact.

$\vec{v}'(y+dy,t) - \vec{v}(y,t) = (v_x(y+dy,t) - v_x(y,t))\vec{u_x}$

$\simeq \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\,dy\,\vec{u_x}$

cisaillem^t faible
on considère q̄ la force varie
de façon linéaire sur écart de $\vec{v}$.

force tangentielle de cisaillement exercée / le fluide au dessu de l'ordonnée y sur une surface dS du fluide situé en dessous.

$$\overrightarrow{dF_{visc}} = \eta \, dS \, \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t) \, \vec{u}_x .$$

η viscosité dynamiq du fluide Pa.s.

diapo.

3) Fluides Newtoniens.

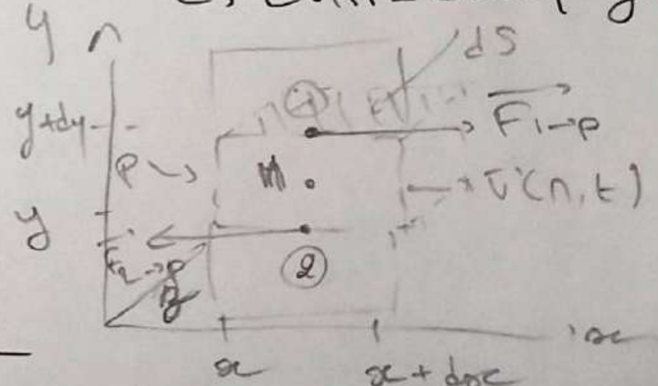
$$\overrightarrow{dF_{visc}} = \eta \, dS \, \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}$$

→ fluide dont la viscosité est cte ∀ l'intensité du cisaillement q lui est appliqué.

4) Equivalent volumique de la force de viscosité de cisaillement.

On reprend notre ex précédent → P = volume
↳ $dV_m = dx\,dy\,dz$

compris entre x et $x + dx$
y
z



$$\vec{dF}_{visc\,①\to p} = \eta\, dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy, t)\,\vec{u}_x$$

$$\vec{dF}_{visc\,②\to p} = -\eta\, dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t)\,\vec{u}_x$$

② en dessous de P. et ō force visc. de cis est au dessu sur en dessous . → ⊖

$$\vec{dF}_{visc} = \vec{dF}_{v①\to p} + \vec{dF}_{v②\to P}$$

$$= \eta\, dS\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy, t) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\right)\vec{u}_x$$

DL 1^{er} ordre en dy : $\overrightarrow{dF_{visc}} = \eta \, dx\,dy\,dz \, \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\, \vec{u_x}$

$$\overrightarrow{dF_{visc}} = \eta \, \Delta\vec{v} \, dV \qquad \Delta v_x \, \vec{u_x} \equiv \Delta\vec{v}$$

eq. volumiq. des forces de viscosité $\vec{f}_{visc} = \eta \, \Delta\vec{v}$

↳ Newtonien + incompressible.

Equation de Navier Stockes

2ème Loi de Newton :

$$\rho \, dV_n \frac{D\vec{v}}{Dt} = (-\overrightarrow{grad}\, p)\, dV_n + \eta \, dV \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \vec{f_v} \, dV.$$

avec $\vec{f_v}$: la densité volumique des actions à distances.

En se limitant au poids : $\vec{f_v} = \rho \vec{g}$

$$\underbrace{\boxed{\rho} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \boxed{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v}} \right)}_{\text{terme convectif}} = -\overrightarrow{grad}\, p + \underbrace{\boxed{\eta \Delta \vec{v}}}_{\text{terme diffusif}} + \rho \vec{g}$$

II - Régimes d'écoulements.

1) Transport diffusif de qté de mvent.

Les part de fluides de ↪ élevée transmettent de proche en proche leur qté de mvent aux part de ↪ + faible (transp. ⊥ à la dir° de l'écoulement)

a) eq° de diffusion

part : $dV = dx\,dy\,dz$

s'exercent sur elle :

- forces visqueuses $d\vec{F}_{visc} = \eta\, dV \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$
- forces pressantes $\vec{dF} = -\overrightarrow{grad}\, p\, dV$

On considère les plaques infinies → ∅ effet de bord

$p(x) = p(y)$.

2nde loi de cP ds (R) galiléen :

$$\mu\, dV \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\, p\, dV + \eta\, dV \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x .$$

$\vec{u}_x$

$$\mu\, dV \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{grad}\,\vec{v}\right)\vec{u}_x = -\underbrace{\frac{\partial p(y)}{\partial x}}_{0} dV\, \vec{u}_x + \eta\, dV \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

$$\mu\, dV \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mu\, dV\, v_x \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} v_x(y,t)}_{0} = \eta\, dV \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0}$$

ν ($m^2 . s^{-1}$) viscosité cinématiq qté de mvent volumiq selon $\vec{u}_x$

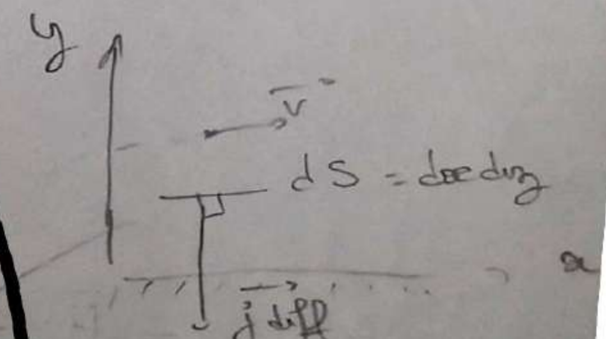
↳ $P_{v,x} = \rho V_x$

eq° de diff° : $\boxed{\dfrac{\partial^2 P_{v,x}}{\partial y^2} - \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial P_{v,x}}{\partial t} = 0}$.

b) vect densité de courant $\vec{j}_{diff}$: qté de mvent volumiq q° traverse une surface unitaire droite / unité de tps.

~~qté de mvent pdt dt~~ :

$\cancel{d P_x = \vec{j}_{diff}\, dS\, (\vec{u}_y)\, dt}$



~~Or d'ap eq° de diff°~~ :

$\cancel{\dfrac{dP_{v,x}}{dt} = \nu \dfrac{\partial^2 P_{v,x}}{\partial y^2}}$

$\Rightarrow \vec{j}_{diff} = -\nu \, \vec{grad} \, (\rho_{v,x})$.

c) Tps caract. de diffusion :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho_{v,x} - \frac{1}{\nu} \frac{\rho_{v,x}}{\partial t} = 0.$$

Dimensionnellem^t : $\frac{\rho_v}{L^2} \sim \frac{1}{\nu} \frac{\rho_v}{\tau_{diff}}$ — L distance caract de l'écoulem^t

$$\tau_{diff} \sim \frac{a^2}{\nu}$$

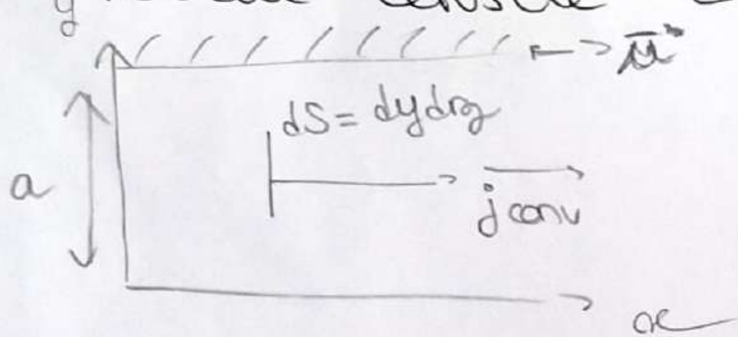
$$\tau \sim \frac{(1.10^{-2})^2}{10^{-3}/10^3}$$ $\mu_{eau} = 10^3 \ kg.m^{-3}$

$$\sim 100 \, s$$

2) Transport convectif de qté de mvent.

Transfert dû au déplacement de fluide, dans le sens de l'écoulement

Vecteur densité de courant de convection :



~~$dP_x = j_{conv}\, dS\, \vec{u_x}\, dt$~~

$$\Leftrightarrow \vec{j}_{conv} = P_{v,x}\,\vec{v}$$
$$= (\rho v_x)\,\vec{v}$$

$$\tau_{conv} = \frac{a}{V}$$

V = v caract de l'écoulement.

3) Nbre de Reynolds.

a) Caract. Reynolds

Caractérise l'importance relative du transport de qté de mvent convectif & diffusif.

$$j_{diff} = -\nu\, \mathrm{grad}(\rho v_x) \approx \nu \frac{\rho V}{L} = \frac{\eta V}{L}$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$j_{conv} = (\rho v_x)\,\vec{v} \sim \rho V^2$$

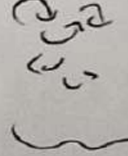
$$Re = \frac{\text{flux conv de qté de mvent}}{\text{diff}} = \frac{j_{conv}}{j_{diff}} = \frac{\rho V^2}{\eta \frac{V}{L}} = \frac{\rho V L}{\eta}$$

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

→ idem.

laminaire — transitoire — turbulents

2000 — 3000



bien déf.

apparition de tourbillons.

Couche limite.

zone dans laquelle le chp des vitesses varie → à proximité d'1 obstacle.

proche CL : terme diff > terme conv

loin CL : conv > diff

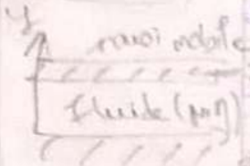
CL : diff ~ conv

↳ Re.

III- Ecoulement // = écoulement pour lequel le terme convectif $(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}=\vec{0}$ (qq soit R_0)

ex : Couette plan

a) Ch. de vitesse et pression :



hyp : 1) écoulement stationnaire $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$

2) parois considérées ∞ infinies → invariance / translat° selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ du sys (plaq mobile) donc les champs associés à l'écoulement $p(M,t)$ et $\vec{v}(M,t)$ ne dépendent que de y. (∅ effet de bord)

3) les lignes de courant sont selon $\vec{u}_x$: écoulemt laminaire : $\vec{v}(M,t) = v_x(y,t)\,\vec{u}_x$

On a $(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v} = v_x\vec{u}_x\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)v_x(y,t)\,\vec{u}_x$

$= \left(v_x\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_x(y,t)\,\vec{u}_x = \vec{0}$ ⇒ écoulemt //

4) fluide newtonien, écoulement incompressible

→ Navier Stockes $\mu\left(\underbrace{\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + \vec{v}\cdot\vec{\text{grad}}\,\vec{v}\right) = -\vec{\text{grad}}\,p + \eta\Delta\vec{v} + \mu\vec{g}$

$\left(\Delta\vec{v} = \Delta v_x\,\vec{u}_x = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\vec{u}_x\right)$

IV- Application dans un écoulement parallèle : Couette Plan

III-

– projection selon $\vec{u}_y$: $-\dfrac{dp}{dy} - \mu g = 0 \rightarrow p(y) = -\mu g y + cte$.

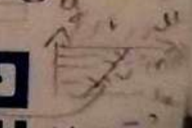
*

– projection selon $\vec{u}_x$: $\eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \rightarrow v_x(y) = Ay + B$

b) CL : $v_x(y=0^+) = B = 0$

$v_x(y=a^-) = A\times a = U \rightarrow A = \dfrac{U}{a}$

Profil linéaire



D'où $\vec{v}(M) = \dfrac{U}{a}y\,\vec{u}_x$

CL → où glissement de rotation, visqueux adhère aux parois : $\vec{v}_{fluide/R}(n,t) = \vec{v}_{paroi/R}(n,t)$

Conclusion :

D'autres app possible → poiseuille plan où là le clp des v → suit une parabole TD.

App° poiseuille cylindriq → médecine → lien entre le débit volumique et une $\neq$ce de p°. (vaisseaux sanguins) $D_V = \frac{\pi R^4}{8 \eta L}$ (pe p

Juste pour l'avoir en tête pour les questions

Autre ex d'écoulement // -- Écoulement de Poiseuille cylindriq

↳ imposé / un gradient de pression le long d'une conduite cylindrique d'axe Ox, de longueur L, rayon R

CL : $p(x=0) = P_e$ $\quad p(x=L) = P_s$

hyp :
1) écoulement incompressible d'1 fluide newtonien
2) écoulement stationnaire
3) lignes de courant selon $\vec{u_x}$
4) conduite horizontale, effet de la pesanteur négligé
   ↳ invariance / rotation $\emptyset$ selon θ
   ↳ $\vec{v}(M,t) = v_x(r, x, t)\,\vec{u_x}$

Écoulement incompressible $\rightarrow \operatorname{div}\vec{v} = 0 = \dfrac{\partial v_x}{\partial x}$

Donc $(\vec{v}\cdot\vec{\operatorname{grad}})\vec{v} = v_x \dfrac{\partial v_x(r,x,t)}{\partial x}\vec{u_x} = \vec{0}$

Eq° de Navier Stokes : $\rho\left(\underbrace{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{\operatorname{grad}}\,\vec{v}}_{=\vec{0}}\right) = -\vec{\operatorname{grad}}\,p + \eta\Delta\vec{v} + \underbrace{\vec{f_v}}_{=\vec{0}}$

$-\vec{\operatorname{grad}}\,p + \eta\Delta\vec{v} = \vec{0}$ $\qquad \vec{v}(M) = v_x(r)\vec{u_x}$ $\qquad \Delta\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv_x}{dr}\right)\vec{u_x}$

• selon $\vec{u_x}$: $\quad -\dfrac{dp}{dx} + \eta\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv_x}{dr}\right) = 0$

$$\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv_x}{dr}\right) = k$$

$\dfrac{dp}{dx} = k$ $\qquad p(x) = kx + k'$

CL : $p(x=0) = k' = P_e$

$p(x=L) = kL + P_e = P_s$ $\qquad k = \dfrac{P_s - P_e}{L}$

$p(x) = \dfrac{P_s - P_e}{L}x + P_e$

Ce q' ns donne $\quad \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv_x}{dr}\right) = \dfrac{P_s - P_e}{L}$

$$r\dfrac{dv_x}{dr} = \dfrac{P_s - P_e}{2\eta L}r^2 + A$$

$$\dfrac{dv_x}{dr} = \dfrac{P_s - P_e}{2\eta L}r + \dfrac{A}{r}$$

=0 sinon diverge

$$v_x = \dfrac{P_s - P_e}{4\eta L}r^2 + A\ln r + B$$

CL : $v_x(r=R) = \frac{ps-pe}{4\eta L} R^2 + B = 0.$

$$B = \frac{-ps-pe}{4\eta L} R^2$$

$$\vec{v}(r) = \frac{pe-ps}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,\vec{u}_x$$ = profil parabolique

$$\vec{v}_{max} = \vec{v}(r=0) = \frac{pe-ps}{4\eta L} R^2\,\vec{u}_x$$

loi de Hagen Poiseuille = express° du débit à travers une section droite $(\mathcal{E})$ de la conduite, valable en écoulement laminaire (≠ de turbulent)

$$D_v = \iint_{M \in (\mathcal{E})} \vec{v}(M)\, d\vec{S}_M \quad \hookrightarrow r\,dr\,d\theta$$

si on divise 1/2 la conduite on divise 1/16 le Dv.

$$= \frac{pe-ps}{4\eta L} \underbrace{\int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr}_{\frac{R^4}{4}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(pe - ps)}$$ conduite cylindrique

Analogies electrocinétiques $\overset{m^3s^{-1}}{D_v} \longleftrightarrow I$

Pa $\rightarrow \Delta p = pe - ps \longleftrightarrow U = \Delta V$

Comme $U = RI \Rightarrow R = \frac{U}{I}$

$\Delta p = R_{hyd} D_v$

On obtient la resistance hydraulique $R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Puissance = force × vitesse

$$P = RI^2$$

$$P_{hyd} = R_{hyd} D_v^2$$

regime permanent qd $\vec{v}_{lim}$ est atteinte $\rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

forces de trainée : $Re \ll 1$ $\quad \vec{T} = -6\pi\,\eta_{env}\, \underset{\text{rayon}}{R}\, \vec{v}_{lim}$

$Re \gg 10^3$ Coefficient de trainée constant Cx.

$$\vec{T} = \frac{1}{2} Cx\, \rho_{env}\, S\, v_{lim}^2 \left(-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$$

↳ vecteur unitaire [illegible]