M28 : Instabilités et Phénomènes non linéaires

Rapport jury : Ce montage ne peut pas se limiter à étudier le non isochronisme des oscillations du pendule pesant. Il s'agit de bien d'illustrer quelques caractéristiques des systèmes non linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou le(s) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d'équilibre, au phénomène de bifurcation, à l'enrichissement spectral, au ralentissement critique… Les candidats doivent prendre en compte les deux aspects de l'intitulé du montage. Éviter un choix trop ambitieux de manipulations non maîtrisées.

Introduction:
Pendant longtemps, les physiciens se sont cantonnés à l'étude des systèmes linéaires ou du moins de systèmes linéaires par de multiples approximations. La raison en est simple, un système non linéaire ne présente pas de solution simple et n'est pas toujours solvable mathématiquement.
Un système est linéaire si l'effet est proportionnel à la cause qui lui a donné naissance et où le principe de superposition s'applique. En opposition, on dit que le phénomène est non linéaire. On peut mettre en évidence la non linéarité de différentes manières : l'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre d'un signal, l'existence d'un seuil, la présence d'hystérésis…
Phénomène non linéaire physique : optique avec les lasers.

I - Bifurcation

Etude du mouvement de la bille dans un guide circulaire: voir M28 analyse théorique du problème. On étudie la stabilité des positions d'équilibre (avec l'énergie potentielle). Bifurcation est dû à un changement de nature des points stables. Ici, la bifurcation conduit à des solutions stationnaires (contrairement au Van der Pol: solutions oscillantes). (Manipulation où il faut parler des incertitudes.)

Montage:

- Moteur relié à grosse alimentation (0,30V, Imax=5A) en continu pour avoir une rotation la plus stable possible.
- Capteur photoélectrique relié à une petite alimentation (continue entre 0V et 12V) directement relié à un oscillo à curseur afin de mesure la vitesse de rotation (mettre en mode défilement).
- Mettre webcam pour filmer la rotation du disque circulaire afin de réaliser les différentes mesures. Faire attention au rolling shutter.

On mesure l'angle de la bille en fonction de la vitesse angulaire, pour cela :

- On détermine à partir de plusieurs images (sur Regressi ou ImageJ) obtenues sur un film l'angle de la bille, pour cela on trace l'angle que fait la bille avec la verticale sur l'image, bien utiliser des photos non inclinés pour avoir de bonne mesures d'angles. On obtient ainsi une moyenne de l'angle avec plusieurs images, avec une incertitude à la moyenne (écart-type) où on estime que l'incertitude est d'environ 5° du fait que la mesure à l'oeil soit très compliquée. Sur le disque, 10° entre chaque graduation.

- Pour la vitesse angulaire, on estime que la stabilité non parfaite du moteur introduit une incertitude sur ω. Pour chaque vidéo, on relève plusieurs valeurs de ω durant le temps de la vidéo (grâce au mode défilement et mesure auto de l'oscillo), afin d'obtenir une incertitude à la moyenne (écart-type).On ne considère pas l'incertitude sur l'oscillo, qui est très négligeable devant l'instabilité du montage.

Lors de l'acquisition de la vidéo:
-Utiliser le logiciel Sordalab
-Décocher Preview
-Faire les réglages de la vidéo : Set Time Limit et Nombre d'image par seconde.

On peut ainsi tracer (sur Regressi, afin d'avoir les incertitudes sur les valeurs obtenues) $cos\theta$ en fonction de $1/\omega^2$, afin d'obtenir ω_c (pente = ω_c^2) et le comparer à la théorie.

Erreur probable par rapport à la théorie : obtention d'images pas parfaitement droites mais légèrement inclinées. On peut tracer le diagramme de bifurcation.

Conclusion : Energie potentielle pour parler de l'instabilité du système, à partir d'un certain seuil (ici w_c) la position initialement stable devient instable donnant naissance à 2 autres positions stables. Ou utiliser le diagramme de phase. (Faire dessin au tableau).

II - Le pendule pesant

Théorie du pendule pesant : https://physique.ensc-rennes.fr/tp_pendules_texteV2.php
(N'est pas dans le poly, **Cf fin partie** I pour les étapes de la manipulation).

Généralement, on utilise le pendule avec des petits angles → système linéaire.
On utilise ici des grands angles (> 45°), on observe la perte d'isochronisme : la période des oscillations ne dépend plus de l'amplitude initiale = signe de la non-linéarité. (**Isochronisme :** Propriété d'un système comportant des oscillations dont la période est de durée constante.)
→ Faire au préalable : mesurer la période T_0 correspondant à la période des oscillations pour les petits angles. (à faire indépendamment mais attention la masse doit toujours être au même endroit pour la suite de la manipulation).

Montage : Pendule + Potentiomètre (mouvement du pendule en tension) + alimentation +/-15V + Carte d'acquisition (signal Analogique → Numérique).

-Réglage du potentiomètre : A l'équilibre, on doit avoir 0V (pour un angle de 0°), on tourne le cercle noir (relié au potentiomètre au niveau de la jonction avec le pendule) pour que ce soit bien le cas (placer au préalable un voltmètre en sortie sur la carte d'acquisition). On vérifie aussi qu'à 45° , on a 7.5V.

Réglages de l'acquisition :

-Pour le calibre (sur l'entrée de la carte d'acquisition), on fait un essai pour voir les amplitudes : on tombe sur +/- 10V.
-On fait un autre essai pour évaluer la fréquence (on regarde le temps pour une période), il faudra mettre une fréquence d'échantillonnage >> à 2*3f = F_e (<u>Théorème de Shannon :</u> fréquence d'échantillonnage au moins 2 fois supérieur à la fréquence du signal) car on va obtenir des harmoniques d'ordre 3 (voir théorie du pendule pour grand angle (leçon n°49)).
-Nombre de points : Pour la TF, on veut une acquisition assez longue (environ 50 sec) et on met un T_e adapté . Normalement, le nombre de points (environ 3000s) est calculé automatiquement en faisant T_e/Total. Il faut qu'ils soit assez nombreux pour bien situer la position des maximas.

<u>Manipulation:</u>
-Calculer sur Latis pro pour avoir θmax en fonction du temps. (Voir poly, pour voir les différents calculs à faire, et les différents tracés à réaliser.). Expliquer les formules utilisées. Il faut assez de points pour avoir le plus précisément le maximum mais pour le diagramme de phase: ne pas avoir trop ou pas assez de point au niveau du calcul de la dérivée → sinon problème lors du tracé.

<u>Tracé théta en fonction du temps :</u>
→ Signature de la non linéarité sur les périodes : périodes non constantes, il y a donc apparition d'harmoniques. Les sources des non linéarités dans le pendule : le poids (avec sa projection avec le sin(θ)) + frottement solides qui sont aussi non linéaires (au niveau de la jonction).

<u>Tracé espace des phases:</u>
La trajectoire de phase n'est pas fermée donc le système n'est pas périodique donc l'amplitude des oscillations change, elle tend vers un point qui correspond à l'état stable du pendule, on appelle ce point un attracteur. De plus, on remarque que les courbes ne forment pas des cercles mais plutôt des “ellipses” traduisant le fait que les oscillations de notre système ne sont pas sinusoïdales.

-On trace toutes les périodes. On modélise avec le modèle de Borda (approximations pour avoir la période des oscillations) pour comparer avec notre courbe expérimentale:
https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple#Formule_de_Borda
T_0 : correspond à la période des oscillations pour les petits angles, à faire indépendamment mais attention la masse doit toujours être au même endroit.
1er ordre : $T_1=T_0(1+\theta^2/16)$
2nd ordre : $T_2=T_0(1+\theta^2/16 + 11.\theta^4/3072)$
On remarque que le 1er ordre n'est pas ajusté tandis que le 2nd ordre est une meilleure approx. On voit bien la perte d'isochronisme, pour des oscillations de grande amplitude, le comportement s'écarte de l'oscillateur harmonique à cause de la présence du terme non linéaire (sinθ).

<u>Etude des non linéarités par TF:</u>
-Faire TF pour observer toutes les fréquences et montrer l'apparition d'harmoniques.
Analyse spectrale : enrichissement spectral dû aux grandes oscillations.

-FFT 3D : courbure nous montre que la fréquence n'est pas conservée en plus de l'amplitude des oscillations.

Conclusion: On a vu qu'en changeant les conditions initiales d'utilisation du pendule, le système était non linéaire, et perdait alors son isochronisme.

IV - Étude des non linéarités : variation de la période

1) *Mise en place*

Dans cette expérience on mesure la position des maximas afin d'en déduire la période. Il est plus rigoureux de calculer la position des maximas en détectant les instants où la vitesse s'annule. Malheureusement c'est plus compliqué sur LatisPro. On utilise donc la détection des maximas.

Il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup de périodes. Utiliser de préférence une petite masse proche de l'axe. Par contre il faut avoir beaucoup de points par période pour pouvoir bien situer la position des maximas (une centaine).

Réaliser des oscillation en partant d'un angle très grand (au moins 45°).

2) *Mesure de la période*

Le bruit gène énormément la détection des maximas. On peut utiliser la fonction lissage pour réduire le bruit.

```
theta_brut=(EA0-moy(EA0))/15*pi
theta=lissage(theta_brut;20)
theta_max=CreteMaxi(theta;0.1)
```

Le second terme de la fonction de lissage (voir la liste des fonctions) indique le degré de lissage (>2). Partir de 4 puis augmenter sa valeur pour faire disparaître le bruit.

La fonction CreteMaxi (voir la liste des fonctions) détecte les maxima supérieure à la valeur demandée (ici 0,1). On doit indiquer une valeur inférieure à la valeur du dernier maximum.

Deux maxima étant espacés d'une période T on peut récupérer la valeur de la période en utilisant la dérivée. On numérote les maxima de 0 à N, puis on dérive cette fonction. La valeur de la dérivée vaut 1/T :

```
num_max=theta_max*0+NumPoint
freq=deriv(num_max)
period=1/freq
```

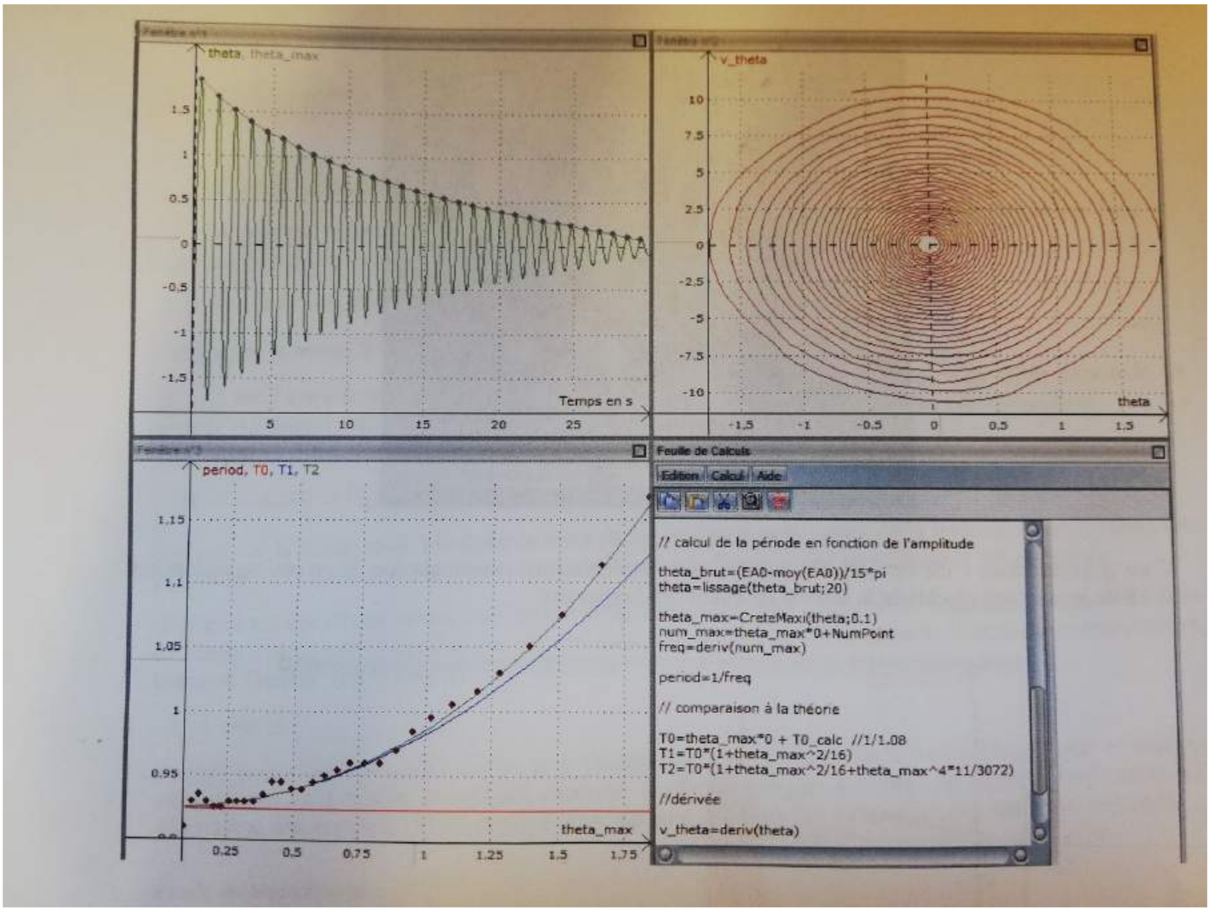
Comparer avec la formule théorique (voir la page wikipedia sur le pendule pesant ou le livre de l'ENS Lyon, Fruchard & co).

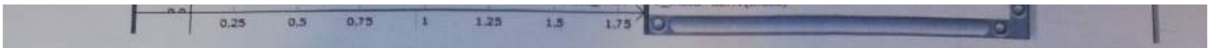
```
T2=T0*(1+theta_max^2/16+theta_max^4*11/3072)
```

A noter, que si vous avez calculé T0 au préalable, il n'y a aucune valeur ajustable. Dans le cas contraire, rentrer une valeur de T0 qui corresponde à votre mesure aux petits angles.

3) *Espace des phases*

Vous pouvez calculer la vitesse et représenter la trajectoire dans l'espace des phases. On observe une déformation de la trajectoire pour les grandes amplitudes.





V - Étude des non linéarités : étude par TF

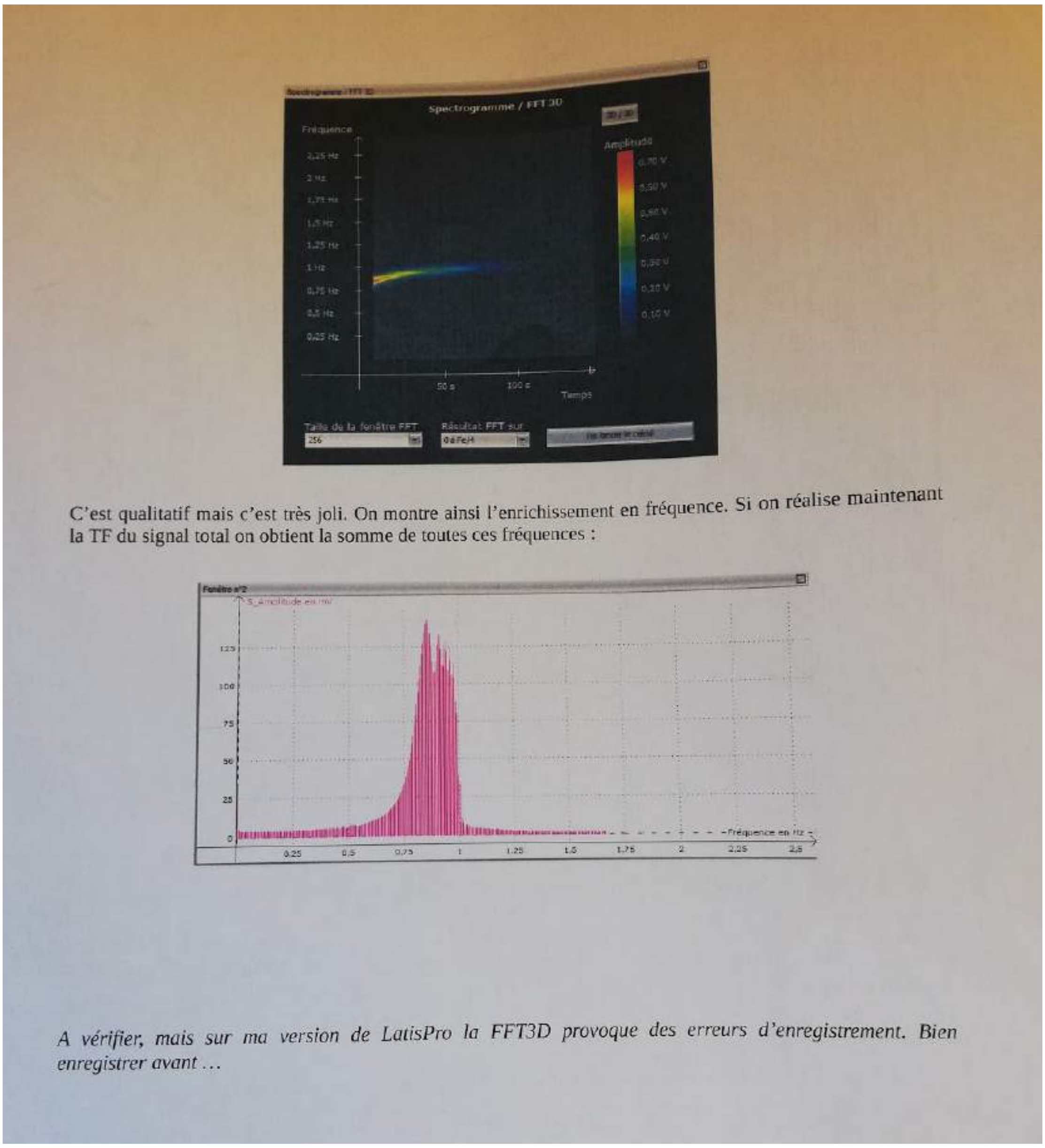
On peut réaliser une étude l'évolution de la fréquence en réalisant une FFT « glissante » (ou FFT dépendante du temps ou FFT 3D). On réalise la TF sur une portion (une fenêtre), puis on se décale en on recalcule la TF etc. [Schéma]. Latispro le fait très simplement.

1) Mise en place

Pour ce calcul il faut avoir beaucoup de périodes afin d'avoir une bonne définition de la TF. Il faut donc avoir beaucoup d'énergie mécanique au départ. Rajouter une masse plus loin de l'axe. Bien fixer le pied. Il faut éviter de prendre trop de points par période, car la fenêtre de la FFT 3D est limitée à 256 points. 10 points par période est suffisant.

2) Calcul de la FFT3D

Dans calcul spécifique choisir FFT3D. Glisser votre courbe. Vous pouvez changer la taille de la fenêtre FFT pour améliorer la définition de la TF.


C'est qualitatif mais c'est très joli. On montre ainsi l'enrichissement en fréquence. Si on réalise maintenant la TF du signal total on obtient la somme de toutes ces fréquences :

A vérifier, mais sur ma version de LatisPro la FFT3D provoque des erreurs d'enregistrement. Bien enregistrer avant …

III - Influence des non linéarités sur l'amplitude de l'oscillateur.

Les oscillateurs quasi sinusoïdaux électroniques sont des systèmes instables délivrant un signal pratiquement sinusoïdal à partir d'une source continue. Ces dispositifs fonctionnent la plupart du temps en régime linéaire, mais les effets non linéaires, même s'il interviennent peu sont fondamentaux car ce sont eux qui limitent l'amplitude des oscillations.

BUT : Oscillateur RLC à résistance négative, l'idée est d'annuler l'amortissement d'un circuit RLC par une résistance négative afin d'entretenir les oscillations.

1) Etude de la résistance négative

M28 - II.1

La résistance négative compense les pertes (car puissance négative) lorsqu'elle est introduite dans un système, mais fait diverger le système mais l'ali empêche cette divergence.

Régime linéaire : le montage se comportera comme une résistance négative tant que la sortie de l'amplificateur opérationnel ne sature pas, c'est à dire tant que l'on a (R+R').i > V_{sat}.

On s'intéresse au régime saturé:
La résistance R_g assure la stabilité du montage, R_g=R , il faut que R' soit inférieur à R pour assurer cette stabilité.

Pour le montage:
-V_R → sonde différentielle (attention à l'atténuation à prendre en compte lors du calcul pour i=(coeff d'atténuation (x20 par exemple)*V_R)/R
-évitez d'utiliser un cable coax (sa capacité n'est pas négligeable).
-lors de l'analyse des caractéristiques : vérifier la pente des graphes (pour vérifier le coeff d'atténuation de la sonde car défois x20 et défois x1/20, il faut faire attention.)
-Réaliser les différentes mesures indiquées sur le poly (+ vérifier la pente des signaux obtenus).
→ Pour Vs = f(i) : montrer que pente = -(R+R') . Pour calcul de imax : $\frac{(V_{sat+}+V_{sat-})/2}{R+R'}$
→ Pour V=f(i) : dire que imax n'a pas changé contrairement à Vmax.
On montre que la pente du régime linéaire dépend de R' mais pas celle du régime saturé
Pente négative (-R') → caractéristique d'une résistance négative. Rupture de pente, caractéristique du système non linéaire du fait que la fonction affine soit non linéaire : on ne respecte pas le principe de superposition.
- Au tableau : faire les caractéristiques, pour bien comprendre ce qu'on observe à l'oscillo.
- Faire un tableur avec les valeurs pour être plus rapide lors de la présentation et pour la clarté des résultats et ne réaliser que quelques mesures en direct. Excel

2) Etude de l'oscillateur
M28 - II.2
On injecte le montage de la résistance négative dans un circuit LC pour obtenir les oscillations. On souhaite créer des oscillations constantes :
Avant l'amorçage des oscillations, i=0 et V=0 → l'AO est en régime linéaire et le dipôle à résistance négative obéit à V'=-R'.i. Donc tant que r>R', on a un système oscillant amorti (être en mode défilement sur l'oscillateur pour montrer l'apparition d'oscillations qui s'atténuent). On pourrait mesurer le temps caractéristique de l'exponentielle, pour voir l'influence de la résistance sur ce temps.
Si R'>r : système oscillant dans l'amplitude croît exponentiellement (rien ne limite à priori cette croissance). C'est la saturation de l'amplificateur opérationnel (effet non linéaire) qui limite cette amplitude → on observe des oscillations à amplitude constante.
-On peut mesurer la fréquence des oscillations obtenue et la comparer à la théorie .
-Si r=32 Ohm, et on a par l'expérience R'=39 Ohm : on peut expliquer légère supériorité en mesurant tout d'abord les différentes résistances au sein du montage, et voir qu'elles ne sont pas toujours celles affichées de plus on ne prend pas en compte toutes les résistances présentes sur le montage (celles des fils et celles du aux effets de contact). On peut montrer l'effet de la non linéarité sur le signal (saturation du signal, forme de palier). On remarque que la fréquence diminue lorsqu'on augmente la résistance. Signal pas parfaitement sinusoïdale, apparition d'harmonique si on fait la TF.

-On retrouve la caractéristique de la résistance négative (Vs=f(i)) mais on remarque que la saturation est juste amorcée. C'est cet effet non linéaire qui limite en pratique l'amplitude des oscillations.

Applications : Horloge.
Conclusion manip

Conclusion:
On a montré le phénomène de non-linéarité avec la perte d'isochronisme des oscillations du pendule pesant. Puis, on pu montrer l'utilisation de ces effets non linéaire dans le domaine de l'électronique pour générer des oscillations constantes. On a pu étudier le phénomène de bifurcation, et voir que le changement d'un paramètre provoque un changement majeur dans l'organisation du système, avec la modification des positions d'équilibre.

Questions :

-Comment fonctionne le capteur du pendule ?
→ un potentiomètre dans un pont diviseur (en général, mais préférable de regarder la notice!!)
-Applications de l'oscillateur de Van der Pol ? Parler de l'élément non linéaire utilisé
→ La saturation de l'ALI est responsable de l'effet non linéaire.
Fonctionnement ALI :
http://gilles.berthome.free.fr/02-Syntheses/A-Traitement_signaux_analogiques/09-Synthese_caracteristiques_ALI.pdf
-Savoir parler de la FFT (voir M24 dans les questions)