LP5 Lois de conservation en dynamique

Remarques jury :
Le titre est général. Les lois de conservation sont à illustrer absolument et la physique est généreuse en exemples variés. Les exemples les plus pertinents sont ceux où les deux corps sont de masses comparables. Il est très maladroit d'insister sur des illustrations où, justement, il n'y a pas de conservation simple, le système étudié n'étant par exemple pas isolé. Il existe d'autres exemples que les interactions newtoniennes. La distinction entre le mouvement d'ensemble et le mouvement barycentrique est fondamentale. L'introduction de la particule fictive ne se fait pas au hasard, il faut montrer l'équivalence du problème réel avec ce modèle,et cela constitue le point clé de la leçon. La confrontation du modèle aux résultats expérimentaux est nécessaire (en astronomie ou en spectroscopie de l'atome d'hydrogène par exemple). Les trajectoires fermées ne sont pas possibles pour tout type de potentiel central. Ne pas utiliser les formules de Binet. Les applications peuvent ne pas être restreintes au potentiel en 1/r. Bien mettre en évidence la notion d'intégrale première du mouvement. Il convient de préciser correctement les hypothèses faites : il n'existe pas que des forces centrales dans la nature, la loi d'action et de la réaction ne s'applique pas automatiquement. Il est erroné d'affirmer que toutes les trajectoires résultant de l'interaction entre deux corps sont des courbes fermées, et encore plus que ce sont des coniques. Justifier les hypothèses de la réduction au cas de deux corps ponctuels et des forces centrales. Pour déduire de la conservation du moment cinétique le caractère plan des trajectoires, l'argument r perpendiculaire à L suffit. Insister sur les lois de Kepler plutôt que sur les formules de Binet. Montrer que l'expression des lois de la mécanique dans le référentiel barycentrique fait apparaître la masse réduite, et conduit à une équation différentielle pour le vecteur position relative r. Il faut montrer comment interviennent les lois de conservation, au moins pour la quantité de mouvement,le moment cinétique et l'énergie mécanique.

Niveau : Licence (3ème année)
Pré-requis : mécanique du point, des systèmes et du solide.

Bibliographie:
- Tout en un MPSI p285
- https://www.youtube.com/watch?v=-WhtfqoStNw pour moment cinétique
- http://www.physagreg.fr/mecanique-22-forces-centrales.php potentiel central

Introduction:
On a vu la mécanique du point, des systèmes et du solide, et les lois associées : principalement le PFD, le TMC, le TEC. Cette leçon a deux buts principaux :
— Relier les lois de la dynamique sous l'angle des quantités conservées, en mettant en évidence leur capacité à résoudre simplement des problèmes.
— Lier la conservation de quantités à la structure du potentiel, permettant ainsi une compréhension plus fine des lois de la dynamique

On suivra sur toute la leçon l'exemple du système à deux corps, avec une force centrale, et on verra que tout au long de l'exposé, on aura de plus en plus de résultats simplement avec les lois de conservation.

→ Bien choisir le système et appliquer une loi de conservation peut permettre de résoudre un problème même en présence de forces inconnues.

I) Conservation de la quantité de mouvement

1) énoncé dans la cas d'un système

Soit un système constitué d'un point, de plusieurs points ou d'un solide et **p** sa quantité de mouvement dans un référentiel d'étude R galiléen. Si on note **F**ext la résultante des forces extérieures appliquées au système alors:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i$$

On s'intéresse au cas où la masse du système est constante.
On peut écrire la 2nd loi de newton sous la forme:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = m\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = m\vec{a} = \vec{F}_{ext}$$

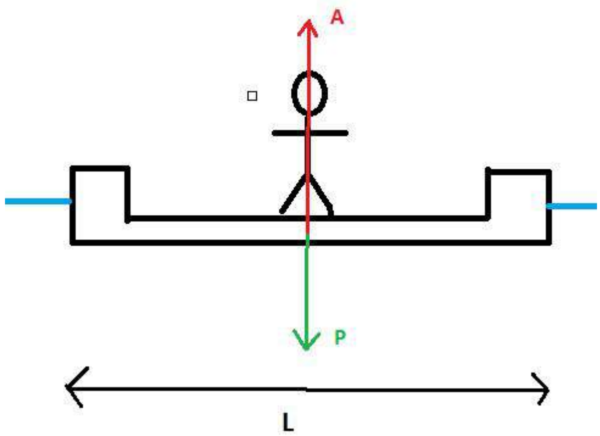
Dans le cas d'un système isolé (**F**=0), ou pseudo isolé (Σ**F**=0)
On remarque que la quantité de mouvement au cours du temps se conserve (**p**=cst), car c'est une dérivée première par rapport au temps.

On introduit aussi le centre de masse de deux point (ou de plusieur $\Sigma m_i OM_i$) matériel de masse m1 et m2:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

2) Exemple :

On considère notre système, un pêcheur sur une barque, la réaction de l'eau sur la barque compense le poids (en fait la poussée d'Archimède), et on suppose qu'il n'y a pas de frottements sur la barque ; le système est donc pseudo isolé.
Le pêcheur se déplace sur la barque, par exemple pour déposer un poisson, et la barque se déplace dans l'autre sens.



Avant que le pécheur ne se lève:

$$\mathbf{p}_{pecheur}+\mathbf{p}_{barque}= cst$$

le pêcheur et la barque sont immobiles donc:

$$\mathbf{p}_{pêcheur}+\mathbf{p}_{\ barque}=0$$

Quand le pécheur va déposer son poisson:

$$\mathbf{p}_{pecheur}+\mathbf{p}_{barque}= 0$$

$$m_1\mathbf{v}_{pecheur}+m_2\mathbf{v}_{barque}=0$$

En intégrant sur le déplacement:

$$déplacement\ du\ pêcheur = -\frac{m2}{m1} déplacement\ de\ la\ barque$$

Et on note qu'après intégration, le résultat ne dépend que du déplacement total de la barque. Mais ce qui est très fort, c'est que le pêcheur peut faire des petits sauts, traîner des pieds, sauter d'un coup, ramper, etc... la barque se sera TOUJOURS déplacée de la même distance. C'est ce qu'on appelle la propulsion par réaction.
On comprend tout de suite lorsque l'on saute d'une barque pour rejoindre le quai, la barque à un mouvement de recul! En pratique, cela peut être reformulé par l'immobilité du centre de masse du système total.

Cas limites, notamment même masse, masse du pêcheur négligeable (quand on marche sur un porte-avion, il ne se déplace pas), et masse du bateau négligeable (le pêcheur reste immobile, et le bateau se déplace sous lui). Si le pêcheur souhaite plonger, la barque va alors partir dans l'autre direction, et il aura de même beau plonger comme il le souhaite, la vitesse de la barque ne dépendra que de sa vitesse après le saut. On note le caractère inéluctable des lois de conservation, c'est très puissant, et en fait un peu contre-intuitif.

3) Pour une particule ponctuelle : lien avec l'invariance par translation du potentiel.

Visualisation par potentiel : en effet si on suppose que les forces ne découlent que d'un potentiel:

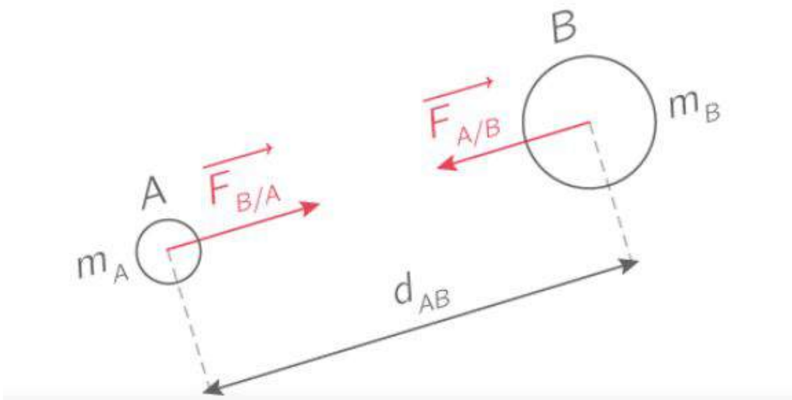
$$\mathbf{E}=-\mathbf{grad}(V)$$

$$\mathbf{F}=-\mathbf{grad}(E_p)$$

On peut visualiser facilement que si le potentiel est indépendant d'une coordonnée (et donc que la physique est invariante par translation sur cet axe), l'impulsion est conservée sur cette coordonnée ; sans être une démonstration exacte, cela met bien de façon simple en exergue le lien entre invariance et conservation. Lien avec l'homogénéité de l'espace, (potentiel constant qui ne dépendant pas des variable de l'espace). Remarque sur le fait qu'en pratique, c'est toujours vérifié, et qu'on ne peut pas y échapper.

4) Système à deux corps: centre de masse

On peut étudier deux corps qui s'attire par une force centrale (Ex: coulomb, gravitationnelle):



Pour la masse A:

$$d(m_A\mathbf{v_A})/dt=\mathbf{F_{B/A}}$$

Pour la masse B:

$$d(m_B\mathbf{v_B})/dt=\mathbf{F_{A/B}}$$

Si on somme c'est deux équation:

Sachant que $\mathbf{F_{B/A}=- F_{A/B}}$ 3eme loi de newton

$$d(m_A\mathbf{v_A}+m_B\mathbf{v_B})/dt=\mathbf{0}$$

$$m_A\mathbf{v_A}+m_B\mathbf{v_B}=cst$$

$$m_G\mathbf{v}_G=cst$$

$$\mathbf{v}_G=cst$$

Le centre de masse est forcément en TRU (translation rectiligne uniforme ou immobile) car conservation de l'impulsion totale, le système étant isolé.

C'est vrai quelque soit la force qui relie les deux masses.

II) Conservation du moment cinétique

1) Énoncé dans le cas d'un système

Dans un référentiel galiléen R, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M calculé en un point fixe O est égale au moment résultant en O des forces appliquées :

$$\left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right|_{\mathscr{R}} = \sum_i \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F}_i)$$

Dans un référentiel galiléen R, la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté (Δ) d'un point matériel M est égale au moment résultant par rapport cet axe des forces appliquées :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

En notant J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à (Δ) et ω sa vitesse angulaire autour de (Δ) : $L_\Delta = J_\Delta\omega$. On peut écrire la loi du moment cinétique sous la forme :

$$J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}_{ext,i}\right)$$

Avec J_Δ (Kg.m²)

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathscr{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

Si on considère un système isolé (**F**=0), On remarque que le moment cinétique est conservé, car c'est une dérivé première par rapport au temps.
On note qu'ici c'est différent de la conservation de l'impulsion, car on peut modifier le moment d'inertie, alors qu'on ne peut pas modifier la masse, donc on aura des effets un peu différents.

2) Ex. du tabouret où on écarte les bras, du pulsar.

https://www.youtube.com/watch?v=-WhtfqoStNw
Prendre deux masses et les tourner à bout de bras : le tabouret tourne. Changer le moment d'inertie quand on revient, en ramenant les masses sur soi, on peut faire tourner le tabouret, différence avec impulsion. Faire tourner le tabouret, et changer son moment d'inertie en cours de rotation, on voit qu'on a bien conservation du moment cinétique et que la vitesse de rotation change. Mettre une roue de vélo alourdie en rotation autour d'un axe horizontal, la mettre à la verticale, on va tourner dans l'autre sens pour conserver le moment cinétique autour de la verticale.

3) Pour une particule ponctuelle : lien avec l'invariance par rotation du potentiel.

Visualisation par potentiel, on prend un potentiel invariant par rotation autour d'un axe dans des coordonnées cylindriques.

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}(E_p(r,z))$$

en coordonnée cylindrique le gradient d'une fonction f:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

On voit que les forces sont soit portées par la verticale, soit dirigées vers l'axe central, ce qui donne un moment par rapport à cet axe qui nul. Cela met bien en relation que l'invariance par rotation du système autour d'un axe donne la conservation du moment cinétique autour de cet axe.
Lien avec l'isotropie de l'espace. C'est une loi générale de conservation, on ne peut pas l'éviter !

4) Système à deux corps: loi des aires

Comme précédemment, on va supposer force centrale : Potentiel invariant par rotation.

$$\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique en O dans le référentiel galiléen:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = r\overrightarrow{e_r} \wedge F(r)\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{0}$$

L_0 conservé,

$$\overrightarrow{L_O}(M) = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{\mathrm{cste}}$$

Implique que le point M se déplace constamment dans un plan perpendiculaire à **L_0**.

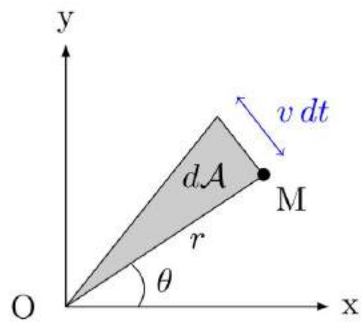
On peut encore réécrire le moment cinétique sous la forme:

$$\overrightarrow{L_O}(M) = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M) = m\,r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$$

On note généralement:

$$\overrightarrow{L_O}(M) = m\,C\,\overrightarrow{e_z} \text{ avec } \boxed{C = r^2\dot{\theta}}\,.$$

Exprimons maintenant l'aire balayée par le rayon vecteur pendant un temps dt :



$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,OM \times v\,dt = \frac{1}{2}\,r \times r\dot{\theta}\,dt$$

Ainsi :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$$

La grandeur $\frac{dA}{dt}$ se nomme parfois vitesse aréolaire, vitesse de balayage d'une aire. On voit que l'aire balayée en un instant dt est toujours le même, quelle que soit la force, c'est un résultat général : 3ème loi de Kepler.

II) Conservation de l'énergie

1) Énoncé dans le cas d'un système. (PH suet)

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non conservatives:

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P_{nc}$$

Si on s'intéresse à un système soumis seulement à des forces conservatives:
On voit que l'énergie mécanique se conserve.

2) Pour une particule ponctuelle : lien avec l'invariance temporelle du potentiel

Dans un référentiel galiléen et pour un système quelconque le TEC s'écrit :

$$dE_C = \delta W + \delta W_{NC}$$

ou E_C est l'énergie cinétique, δW le travail élémentaire des forces dérivant d'une énergie potentielle E_P et δW_{NC} le travail élémentaire des forces non conservatives ne dérivant pas d'une énergie potentielle.

Intéressons nous à un système soumis uniquement à des force conservative.

$$dE_C = \delta W$$

Considérons une énergie potentiel qui dépend de l'espace et du temps E_p(x,y,z,t):

$$dE_P = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot \vec{v}dt + \frac{\partial E_P}{\partial t}$$

On sait que:

$$\delta W = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot \vec{v}dt$$

On peut donc écrire:

$$d(E_C + E_P) = \frac{\partial E_P}{\partial t}$$

On remarque que l'invariance par rapport au temps de l'énergie potentiel donne la conservation de l'énergie mécanique.

3) Application au système à deux corps :

Si la force dérive d'un potentiel central, elle ne dépend pas du temps. Donc l'énergie mécanique est conservé:

$$E_\mathrm{M} = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(r)$$

$$E_\mathrm{P} = \frac{K}{r}$$

On peut exprimer la vitesse en coordonnées polaires :

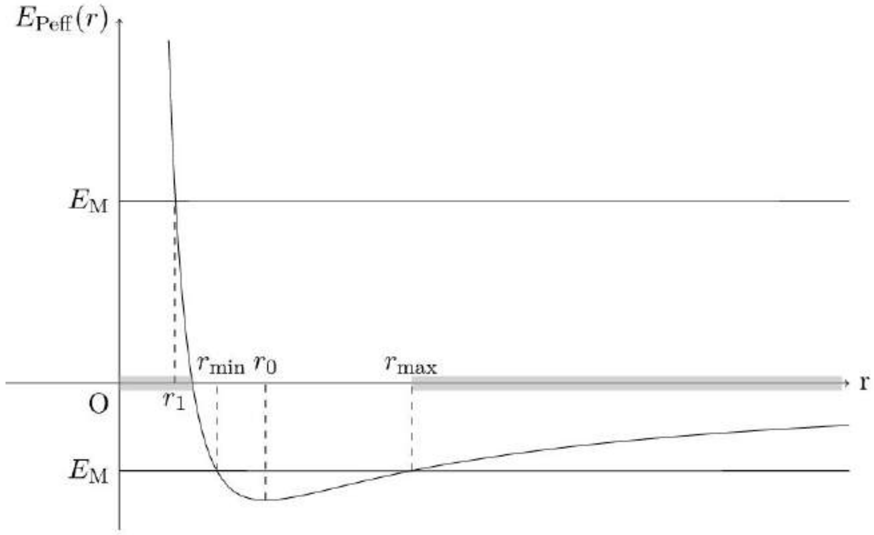
$$E_\mathrm{M} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_P(r)$$

On peut écrire un potentiel effectif grâce à la conservation du moment cinétique:

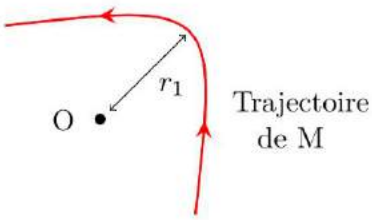
$$\boxed{E_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2\,r^2} + E_P(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{Peff}}(r)}$$

Le problème se résume alors à l'étude d'un point matériel de masse m dont la position est décrite par un seul degré de liberté, r; et soumis à une force conservative dont l'énergie potentielle est E_{peff}.

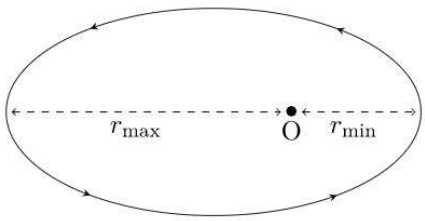
On s'intéresse au cas d'une force attractive K<0.



- Si E_M>0 on se retrouve dans la même configuration qu'une force répulsive. C'est à dire que le seul mouvement possible s'effectue entre r_1 et l'∞, on a à faire à un **état de diffusion**. Mouvement hyperbolique



-
- E_M=0 mouvement parabolique
- Si $E_{M,}$<0, la trajectoire s'effectue entre r_{min} et r_{max}, on parle alors **d'états liés**. Le mouvement dans ce cas est une ellipse.



Pour plus d'info:http://www.physagreg.fr/mecanique-22-forces-centrales.php

Pour une énergie cinétique minimum $\dot{r}$=0 donc r=cst, trajectoire circulaire au(x) minimum(s) d'énergie potentielle, r_{min} pour une énergie donnée qui est dû à la barrière cinétique. Bien noter qu'on a juste supposé que la force dérivant d'un potentiel central attractif, rien de plus, et qu'on a énormément de résultats !

4) Le vecteur de Runge-Lenz : encore un invariant. (Si assez de temps)

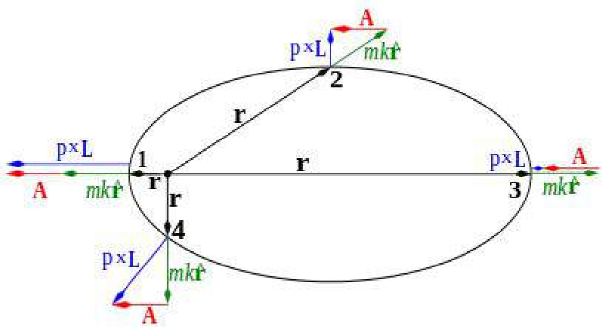
A garder pour les questions

Le vecteur de runge-lenz n'est constant que pour une force centrale en carré inverse.
Le vecteur de runge-lenz noté **A** (trouvé une autre lettre pour la leçon car A est déjà définie comme l'aire plus haut) Wikipedia

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$$

avec:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$



La conservation du vecteur de Runge-Lenz est associée à une symétrie inhabituelle : le problème de Kepler est mathématiquement équivalent à une particule se déplaçant librement sur une 3-sphère, ce qui implique que le problème est symétrique pour certaines rotations dans un espace à quatre dimensions. Comparé à la conservation du moment cinétique qui est liés à la symétrie de rotation d'une 2-sphère dans un espace à 3 dimensions.

Conclusion : Importance historique des lois de conservation : c'est la conservation de l'énergie qui poussa Fermi à postuler l'existence du neutrino. Nous avons mis en évidence des cas où la conservation de grandeurs mécanique rend l'étude plus simple qu'une étude au travers du principe fondamental de la dynamique. Rappeler le lien entre les quantitées conservées et les invariances du potentiel (les symétries).

Remarque:

-Le théorème de Noether exprime l'équivalence qui existe entre les lois de conservation et l'invariance des lois physiques en ce qui concerne certaines transformations (typiquement appelées *symétries*). Ce théorème ne s'applique qu'aux systèmes descriptibles par un lagrangien. Il existe un théorème analogue pour la mécanique hamiltonienne.

Par exemple :

- l'invariance par translation dans le temps implique que l'énergie est conservée ;

- l'invariance par translation (homogénéité) dans l'espace implique que la quantité de mouvement est conservée ;
- l'invariance par rotation (isotropie) dans l'espace implique que le moment angulaire est conservé.

-Attention à ce que tous les systèmes considérés soient bien isolés.
-Attention : on jongle entre mécanique du point et mécanique des systèmes, et il faut être très clair la dessus.
- Revoir un peu les coniques, il peut y avoir des questions dessus
-Autres applications possibles : propulsion d'une fusée, la patineuse et choc. Application apprécié par le jury : effet compton pour les chocs, fibre à gradient d'indice (analogie méca/optique appréciée).

Questions:
Qu'entendez-vous par espace isotrope ?
Même propriétés dans toute les direction

Qu'entendez-vous par espace homogène ?
Dont tous les éléments sont de même nature.

De quelle façon peut-on traiter des systèmes non conservatifs en les rendant conservatifs?
Réponse leo: Si il est possible de négliger les frottements. Ou en prenant en compte la conservation de l'énergie totale, et pas seulement de l'énergie mécanique.

Pourquoi avoir proposé le vecteur de Runge-Lenz, quelle est son utilité en mécanique quantique (cf Aslangul) ?
Il montre que les énergies entre niveaux de l'atome d'hydrogène ne dépendent que de n, et pas de m et de l.

Pourquoi avoir dessiné la danseuse avec une jambe pliée ? Qu'est-ce que cela change ? Equilibre et frottement.

Connaissez-vous d'autres lois de conservation ailleurs qu'en mécanique ?
Conservation de la charge, flux thermique.