LP 27 : Propagation guidée des ondes

Remarque Jury :
La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques.
Les notions de modes et de fréquence de coupure doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques.

Bibliographie:

- Electromagnétisme, Pérez
- Electromagnétisme n°1, Dion
- https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/electromagnetisme/19.pdf
- http://jean.lehir.pagesperso-orange.fr/mp/Elements%20de%20cours/P6-propagation%20et%20rayonnement/P6-4-Propagation%20guidee.pdf (pour le mode TE)
- BUP n°742

Niveau : Licence

PR :

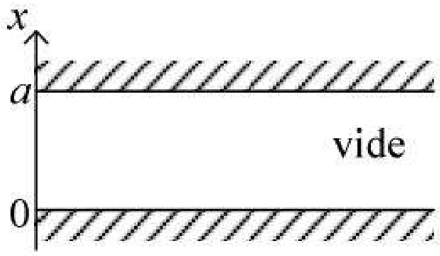
- Equation de Maxwell
- Equation de d'alembert
- propagation onde électromagnétique dans le vide
- Ondes planes

Introduction:
Le guidage des ondes électromagnétiques est d'un grand intérêt pour canaliser l'énergie électromagnétique et ainsi assurer le transport et l'utilisation de cette énergie. La technologie de guidage dépend essentiellement des fréquences et des longueurs d'onde des ondes transporter. Les fibres optiques utilisent les variations des indices de réfraction des matériaux isolants pour transporter la lumière dans le domaine du visible ou du spectre proche, tandis que les ondes de fréquence micro-ondes sont canalisées par des guides métalliques.

I/ Propagation entre deux conducteur

1) Structure de l'onde

Prenons deux plans conducteurs considérés comme parfaits, un en x=a et l'autre en x=0 et du vide entre les deux.



Soit une source électromagnétique:
-de pulsation ω
-se propageant dans la direction z

Le champ électrique correspondant est de la forme:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E_0}(x,y)\exp(j(kz-\omega t))$$

En analysant les invariances de notre problème on s'aperçoit que le système est invariant selon y, donc **E** ne dépend pas de y.

$$\mathbf{E}=\mathbf{E_0}(x)\exp(j(kz-\omega t))$$

Comme les plaques sont des conducteurs parfaits on sait que:
-**E //** (composante du champ E parallèle à la paroie)=**0**, en x et a.
-**B** $\perp$ (composante du champ B perpendiculaire à la paroie)=**0,** en x et a.
(dû aux relations de passage B et E sont nul dans le conducteur parfait)

Cela nous donne:

$$Ey(a) = Ey(0) = 0$$
$$Ez(a) = Ez(0) = 0$$
$$Bx(a) = Bx(0) = 0$$

Les équations de maxwell s'écrivent, comme on est dans le vide:

$$\text{Maxwell–Gauss : } \frac{d\underline{E}_x}{dx} + ik\underline{E}_z = 0 \quad (1)$$

$$\text{Maxwell–Flux : } \frac{d\underline{B}_x}{dx} + ik\underline{B}_z = 0 \quad (2)$$

$$\text{Maxwell–Faraday : } \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ 0 \\ ik \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = i\omega\vec{B}\text{, soit } \begin{cases} -k\underline{E}_y = \omega\underline{B}_x & (3.1) \\ ik\underline{E}_x - \frac{d\underline{E}_z}{dx} = i\omega\underline{B}_y & (3.2) \\ \frac{d\underline{E}_y}{dx} = i\omega\underline{B}_z & (3.3) \end{cases}$$

$$\text{Maxwell–Ampère :}\begin{cases} k\underline{B}_y = \frac{\omega}{c^2}\underline{E}_x & (4.1) \\ ik\underline{B}_x - \frac{d\underline{B}_z}{dx} = -i\frac{\omega}{c^2}\underline{E}_y & (4.2) \\ \frac{d\underline{B}_y}{dx} = -i\frac{\omega}{c^2}\underline{B}_z & (4.3) \end{cases}$$

https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/electromagnetisme/19.pdf **Page 2 (ne pas écrire les équations au tableau, perte de temps)**

Considérons un premier cas où **E** est suivant $\mathbf{u_x}$.

En faisant les calculs on tombe sur un champs électrique de la forme:

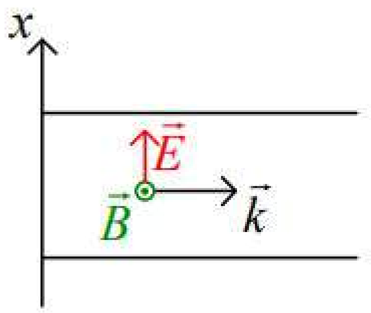
$$\mathbf{E}=E_{em}\exp(j(kz-\omega t))\mathbf{u_x}$$

et

$$\mathbf{B}=B_{em}\exp(j(kz-\omega t))\mathbf{u_y}$$

E_{em}=cst

C'est une propagation que l'on à l'habitude de voir E et B sont perpendiculaire à la direction de propagation.



C'est la propagation d'une onde transverse électromagnétique.
(Est-ce une OPPM, je dirai oui, E ne dépend pas de x ni de y)

Considérons un deuxième cas où **E** est suivant $\mathbf{u_y}$.

$$\mathbf{E}=E_0(x)\exp(j(kz-\omega t))\mathbf{u_y}$$

On connaît l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

$$\Delta E - \frac{1}{c}\frac{\square^2 E}{\square t^2} = 0$$

Ce qui nous donne:

$$\frac{\square^2 Eo}{\square x^2} - (k^2 - \frac{^2}{c^2})Eo = 0$$

2) **Résolution**

1er cas: $k = \frac{^2}{c^2}$

$$Eo''(x) = 0 \qquad Eo(x) = Ax + b$$

D’après les conditions aux limites

$$Ey(a) = Ey(0) = 0$$

donc

$$A = B = 0$$
$$Eo = 0$$

Pas intéressant.

<u>2eme cas</u>: $k > \frac{{}^2}{c^2}$

on pose:

$$^2 = k^2 - \frac{{}^2}{c^2}$$
$$E''o - {}^2Eo = 0$$

solution:

$$Eo(x) = Aexp(x) - Bexp(-x)$$

CL:

$$Ey(a) = Ey(0) = 0$$

donc

$$A = B = 0$$
$$Eo = 0$$

Pas intéressant non plus.

<u>3eme cas</u>: $k < \frac{{}^2}{c^2}$

on pose:

$$\rho^2 = \frac{{}^2}{c^2} - k^2$$
$$E''o + \rho^2 Eo = 0$$

solution de l’équation:

$$Eo(x) = Acos(\rho x) + Bsin(\rho x)$$

CL

$$Ey(0) = 0 \ donne \ \ A = 0$$
$$Ey(a) = 0 \ donne \ \ Bsin(\rho a) = 0$$

Pour un entier n>1, $\rho a = n\pi$

On en déduit B en utilisant la relation rot **E**=-d**B/**dt

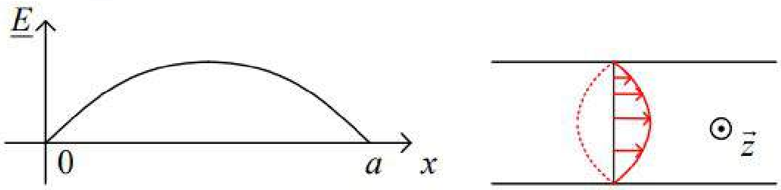
$$\vec{E} = \sum_{n \geq 1} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp\left(j(kz - \omega t)\right) \vec{u_y}$$

$$\vec{B} = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} -\frac{k_n}{\omega} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{j(kz - \omega t)} \\ 0 \\ -\frac{i n\pi}{a\omega} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{j(kz - \omega t)} \end{pmatrix}$$

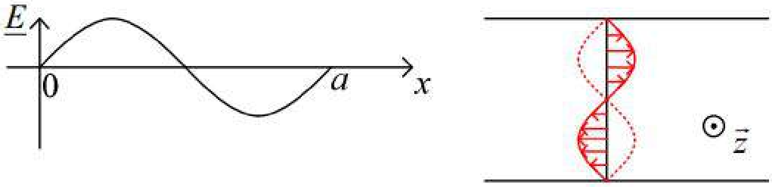
On remarque que le champ **B** n'est pas orthogonal à la direction de propagation.On appelle ça une onde transverse électrique, On remarque aussi plusieurs modes de propagation TE(transverse électrique).

On peut représenter les premiers modes:

- TE_1 :



- TE_2 :



Il est possible aussi d'avoir un autre mode de propagation, les ondes T M (transverse Magnétiques)
voir https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/electromagnetisme/19.pdf page 7
Solution sous forme de cosinus.

3) Relation de dispersion

$$\rho^2 = \frac{2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n}{a}\right)^2$$
$$k(n)^2 = \frac{2}{c^2} - \left(\frac{n}{a}\right)^2$$

$$k(n) = \frac{}{c}\sqrt{1 - \frac{c^2 n^{22}}{a^{22}}}$$

$$\rightarrow \; k(n) = \frac{}{c}\sqrt{1 - n^2\frac{o^2}{2}} \text{ avec } o = \frac{c}{a}$$

Sous la racine on a:

$$1 - n^2\frac{o^2}{2} > 0$$

$$\rightarrow \; > no$$

<u>Pulsation de coupure minimum, si $< o = min$ aucune onde se propage dans le guide.</u>

En termes de longueur d'onde

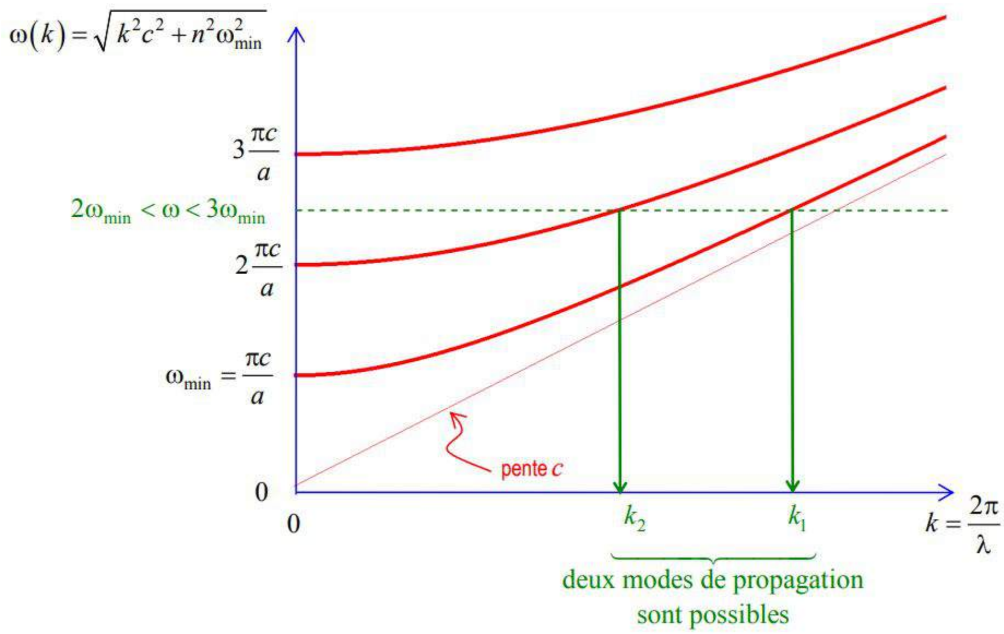
$$\lambda o = \frac{2\pi c}{o} \qquad \lambda = \frac{2\pi c}{}$$

$$k(n)^2 = \frac{2}{c^2} - \frac{n^2 o^2}{c^2}$$

$$\rightarrow \; \frac{1}{\lambda(n)^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2}{4\lambda o^2}$$

Il y a de la dispersion alors que l'on est dans le vide!?!?

Cela est dû aux conditions aux limites



4) Vitesse de phase/vitesse de groupe

$$v(n) = \frac{}{k(n)} = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2\frac{o^2}{2}}} > c$$

La vitesse de phase peut être supérieur à la vitesse de la lumière car elle n'a aucun sens physique.

En partant de $\rho^2 = \frac{2}{c^2} - k^2$ et en différenciant ω et k

$$2d = c^2 dk(n)k(n)$$

$$vg(n) = \frac{d}{dk(n)} = c^2 \frac{k(n)}{}$$

$$vg(n) = \frac{d}{dk(n)} = c\sqrt{1 - \frac{n^2 o^2}{2}} < 0$$

La vitesse de groupe représente la vitesse à laquelle se déplace l’énergie (l’information). On remarque qu’elle est inférieur à la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide.

On peut s'intéresser aussi au vecteur de poynting qui traduit la propagation de l’énergie des ondes électromagnétique.

Le vecteur de Poynting a pour expression:

$$\vec{\Pi}(x, z, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega} E_0^2 \left(\sin \frac{n\pi x}{a}\right)^2 (\cos(\omega t - kz))^2 \, \vec{e_z} - \frac{n\pi}{4a\omega} E_0^2 \sin \frac{2n\pi x}{a} \sin(2\omega t - 2kz) \, \vec{e_x}$$

La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est bien selon $\mathbf{e}_z$, sens de propagation de l’énergie électromagnétique transportée par une des onde TE_n.

$$\left\langle \vec{\Pi}(x, z, t) \right\rangle_t = \frac{k}{2\omega} E_0^2 \left(\sin \frac{n\pi x}{a}\right)^2 \vec{e_z}$$

5) Interprétation onde plane

On reprend notre vecteur champ électrique pour un mode quelconque:

$$\mathbf{E} = E_n \sin\left(\frac{nx}{a}\right)\cos(kz - \omega t)\,\mathbf{u_y}$$

En utilisant la relation trigo sin(a)cos(b) on peut réécrire ce vecteur sous la forme:

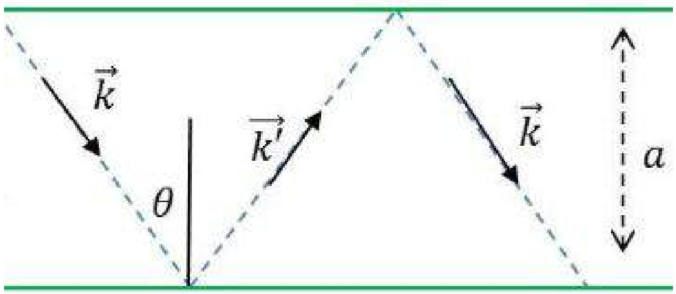
$$\mathbf{E} = E_n \{\sin\left(\frac{nx}{a} + kz - \omega t\right) - \sin\left(-\frac{nx}{a} + kz - \omega t\right)\}\,\mathbf{u_y}$$

On s'aperçoit que l’on a deux vecteur d’onde dans ce champ électrique:

$$\mathbf{k} = \frac{n}{a}\mathbf{u_x} + k\mathbf{u_z}$$

$$\mathbf{k'} = -\frac{n}{a}\mathbf{u_x} + k\mathbf{u_z}$$

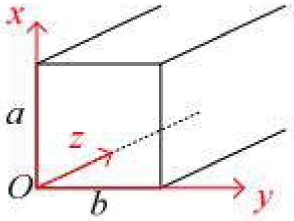
Les modes de propagation TE_n peuvent aussi bien s’interpréter comme une onde électromagnétique plane de polarisation rectiligne se propageant sous incidence oblique et se réfléchissant alternativement sur les deux parois métalliques selon la loi de Snell-Descartes.



II/ Guide d’onde rectangulaire

1) Mode présent

Pour un guide d'onde rectangulaire de largeur a et de hauteur b, on a en plus d'une condition au limite en x, une en y.



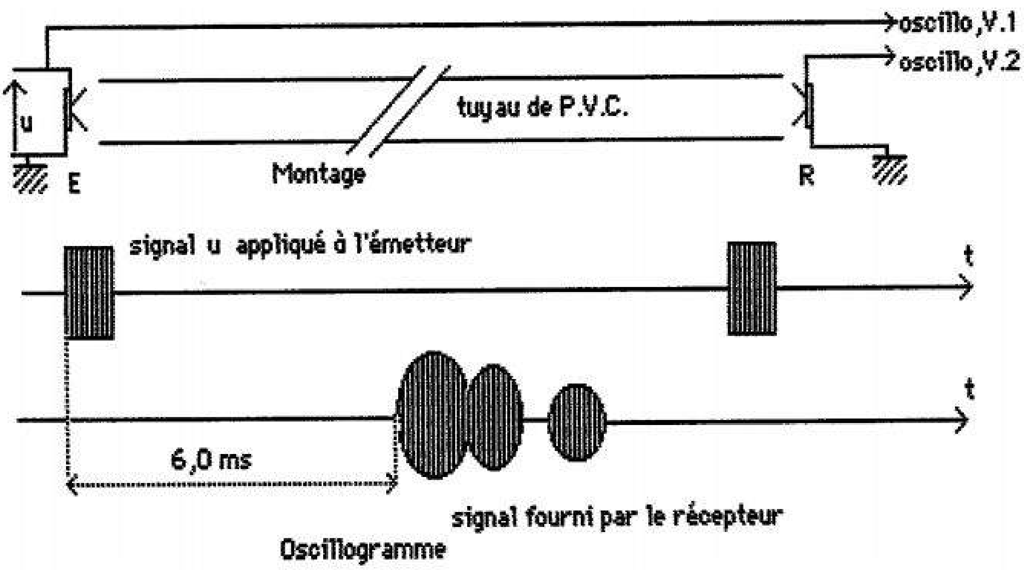
On a une relation de dispersion qui s'écrit maintenant:

$$k(n,m)^2 = \frac{2}{c^2} - \frac{n^{22}}{a^2} - \frac{m^{22}}{b^2}$$

Et en longueur d'onde:

$$\frac{1}{\lambda(n)^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2}{4a^2} - \frac{m^2}{4b^2}$$

2) Mise en évidence expérimentale



L'émetteur utilisé est très répandu dans les lycées (émetteur Murata). Il fonctionne à 40 KHz; il émet donc des ultrasons.Il est alimenté ici par des trains d'une vingtaine de sinusoïdes correspondant donc à une largeur de 0,5 ms. La longueur d'onde λ des vibrations acoustiques à l'air libre vaut $\lambda = c/f = 340\ m/40.10^3 = 8{,}5$ mm. Le récepteur utilisé est un récepteur Murata semblable à l'émetteur. L'amplitude de ses vibrations augmente progressivement lorsqu'il reçoit les premiers fronts d'une onde de fréquence correcte, et, lorsqu'il n'est plus excité, il continue encore à vibrer à sa fréquence propre (proche de 40 kHz) jusqu'à ce qu'il ait dissipé l'énergie emmagasinée. Ceci explique que la forme des signaux électriques récupérés à l'extrémité du tuyau, bien qu'en relation étroite avec celle des signaux excitant l'émetteur, en diffère quelque peu.

On a réalisé l'expérience avec un tube de section carré a=12.24mm de côté. et d'une longueur de L=110.6 cm.

$$\frac{1}{\lambda(n)^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2+m^2}{4a^2}$$

En faisant les calculs il faut:

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2+m^2}{2a^2} > 0$$

on trouve:

$$n^2+m^2<8.24$$

n=0,1,2 m=0,1,2
Cela nous donne 9 modes de propagation possible.

La vitesse de groupe peut se calculer comme:

$$vg = c\frac{\lambda}{\lambda(n,m)}$$

$$vgexp = \frac{L}{\Delta t}$$

Lors de l'expérience on a mesuré trois temps que l'on voit apparaître à l'oscilloscope.
$\Delta t1=3.27ms$
$\Delta t2=3.83ms$
$\Delta t3=4.3ms$

Ce qui nous donne des vitesses:
vg1=338.2m/s
vg2=288.8m/s
vg3=257.2m/s

Les longueur d'onde correspondantes sont:
$\lambda 1=8.5$ mm mode 0,0
$\lambda 2=10$ mm mode 1,0 ou 0,1
$\lambda 3=11.2$ mm mode 1,1

Conclusion:

Message à faire passer : même dans le vide, la présence de conditions aux limites entraîne de la dispersion. Il y a une fréquence de coupure en dessous de laquelle aucun signal ne peut être transporté. Le guidage sert à canaliser l'énergie comparé à l'émission à l'air libre. On a aussi vu dans cette leçon que le guidage et les modes qui en découle ne s'applique pas qu'aux ondes électromagnétiques.

Remarque:
-Savoir expliquer avec un schéma la vitesse de phase et de groupe

-Dans une guide d'onde rectangulaire en pour les ondes électromagnétiques seul le mode TE peut se propager par rapport au condition aux limites.
-Se renseigner sur les cable coaxial: fonctionne comme une cage de faraday, moins impacté par les perturbation extérieur. Impédance de 50 Ohms.
-Les courants haute fréquence circulent dans une pellicule proche de la surface des conducteurs. L'épaisseur de cette pellicule diminue quand la fréquence augmente. La résistance d'un conducteur augmente comme la racine carrée de la fréquence ; c'est ce qu'on appelle “l'effet pelliculaire “ voir wiki.

Question:
Guide d’onde monomode : ça sert à quoi ? Comment le résout-on (approche géométrique ou ondulatoire ?). Le guide monomode représente la propagation à l’air libre, mais en canalisant l'énergie, il y a moins de perte qu’une onde émise sphériquement. Pour réussir à n’avoir qu’un seul mode on peut réduire la taille du tuyau dans le cas de notre expérience précédente. Ou augmenter la longueur d’onde à laquelle on travaille suivant la taille de notre guide d’onde. On peut montrer ça par rapport au graphe de dispersion.

Le fait que la vitesse de groupe soit inférieure à c implique-t-il que le photon a une masse ?
Non, on peut voir ça comme une onde plane rebondissant sur les parois du guide, donc le photon parcourt plus de chemin que la longueur du guide. Comme la distance est plus longue, le temps est plus long pour parcourir la longueur du guide.

Dans le guide d’ondes assimilé à un conducteur parfait, pourquoi Bint=0 ?
Un conducteur parfait est un conducteur au sein duquel le champ électrique est nul en toutes circonstances. Cela revient à considérer que l’équilibre électrostatique s’établit instantanément et l’on conçoit bien que cette hypothèse sera d’autant mieux approchée que l’on est en relative basse fréquence. Il peut exister un champ magnétostatique à l’intérieur d’un tel conducteur, mais toute variation temporelle du champ **B** est exclue : elle induirait un champ électrique variable.

Vous avez dit que la vitesse de l’énergie, c’est la vitesse de groupe, pouvez-vous expliquer comment on le démontre ?
La vitesse de phase est supérieur à la vitesse de la lumière. Donc c’est la vitesse de groupe qui représente le transport d’énergie.
La vitesse de groupe correspond à la vitesse à laquelle l'énergie est transportée par le signal, mais ce n'est pas toujours le cas, en particulier dans des matériaux dispersifs aux propriétés particulières. Certains matériaux ont ainsi permis d'observer la propagation d'impulsions laser avec des vitesses de groupe supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide sans que l'énergie transportée ne se déplace plus vite que celle-ci et donc sans que le principe de relativité soit violé.

Les relations de passage pour E viennent de quelles équations de Maxwell ?
Maxwell Gauss. div **E**= $\rho/\varepsilon o$

Vous pensez qu’on peut appliquer le guidage à du quantique ? Par exemple, avec des électrons ?
Oui, il serait possible en s’appuyant sur le confinement d’un électron dans un puits.
Pour avoir du monomode, il faudrait des guides de la taille de la longueur d’onde de l’électron.

Pourquoi on moyenne le Poynting en EM?
Réponse leo: La variation est tellement rapide que ce que l’on peut mesurer expérimentalement c’est une moyenne.