

LP23: Traitement d'un signal. Etude spectrale

Rapport du jury: Ce n'est pas une leçon sur le filtrage qui est attendue ; il ne faut pas se réduire à l'étude d'un ou plusieurs filtres électroniques. Cette leçon ne peut en aucun cas se réduire à la simple étude de la théorie de Fourier. Cette leçon ne doit pas se réduire à un catalogue de systèmes de traitement analogique du signal. Elle peut aussi mettre en exergue des méthodes numériques enseignées notamment dans les programmes de CPGE. L'analyse de Fourier est centrale dans cette leçon, et les oscilloscopes numériques permettent de la mettre en oeuvre très facilement. Il est tout à fait possible d'étudier des systèmes non linéaires. L'étude spectrale doit être soigneusement présentée. Une bonne place doit être consacrée aux applications. Cette leçon ne saurait se limiter à l'étude des filtres du premier ordre. Le jury attend la définition d'un filtre et de ses caractéristiques ainsi que l'exploitation pratique de ces dernières. Le candidat doit pouvoir montrer le lien entre la forme du diagramme de Bode du circuit, le comportement de celui-ci (intégrateur, dérivateur..) et les propriétés de l'équation différentielle associée. Une autre remarque s'impose : il n'est pas correct de définir un déphasage à partir d'une tangente ou d'une Arc tangente mais la fonction argument d'un nombre complexe en revanche correspond bien à la grandeur recherchée.

Niveau : CPGE/Cycle universitaire

Pré-requis:

- Bases d'électrocinétique
- Résolution d'équations différentielles
- Notation complexe

Bibliographie:

- Electrocinétique, G.Rosset
- Electronique 2, F.Manneville (base de la leçon)

Des infos intéressantes sur les leçons là :

<https://martinbourhis.monsite-orange.fr/file/c306012441c18b8e9022fcd9a11d1848.pdf>

https://uhincelin.pagesperso-orange.fr/LP23_traitement_signal_etude_spectrale.pdf

<https://martinbourhis.monsite-orange.fr/file/e1067d8497f5526d9d70d28ee0652799.pdf>

http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/fiches_agreg.pdf

Introduction:

Nous avons vu l'expression de $i(t)$ et $u(t)$ des composants dans un circuit étaient régis par des équations différentielles décrivant le système considéré. En étudiant cette évolution temporelle des grandeurs, on a pu voir par exemple la charge d'un condensateur (ou encore la décharge). On a donc cette idée de réponse à une entrée par le système. Cette réponse est importante car si notre système réagit par rapport à une entrée on va pouvoir alors peut-être pouvoir traiter l'information?

I - Analyse fréquentielle

1) Equations différentielles linéaires et fonction de transfert

On a vu que nos systèmes pouvaient se décrire par des équations différentielles (d'ordre 1, 2), de façon générale, pour un système linéaire dont les caractéristiques de ses composants sont indépendantes du temps, on peut exprimer une équation différentielle du type: **DIAPO**
On peut alors exprimer notre sortie en fonction de l'entrée.

Prenons le cas du circuit RC : **DIAPO**

On étudie la tension du générateur en fonction de l'excitation $e(t)$.

On a déjà vu le régime transitoire (où on a vu la charge et la décharge du condensateur), lorsque le temps de réponse est nettement supérieur à celui du régime transitoire, le système s'aligne avec la réponse de l'excitateur : régime forcé. On néglige le régime transitoire pour ne s'intéresser qu'au régime sinusoïdal forcé

→ Notation complexe de $e(t)$ et $s(t)$ (très adapté car système linéaire!) **DIAPO**

Les équations sont linéaire donc notre sortie est de la forme de $e(t)$.

Définition: Fonction de transfert: rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée tel que : $H(w)=e(t)/s(t)$ pour savoir comme se comporte notre système suite à l'excitation de pulsation donnée (comme une "boîte noire"). La connaissance de cette fonction de transfert va nous permettre pour une entrée connu à une pulsation donnée connaître la sortie associée à cette pulsation.

-Cas du RC: **DIAPO** on a $H(w) = \underline{U}/\underline{E}=1/(1+jRCw)$

Mais nos signaux ne sont pas toujours sinusoïdaux alors comment faire?

2) Représentation fréquentielle : série de Fourier

Objectif: Décomposer n'importe quel signal périodique comme une somme de cosinus et de sinus pour exploiter la linéarité de équations différentielles (la réponse à une somme est la somme des réponses). → Décomposition en série de Fourier.

Pour un signal $s(t)$ quelconque on a les expression en série de Fourier: **DIAPO** → Outils mathématiques (on ne détaille pas d'où cela sort).

(A savoir: les expressions peuvent s'écrire uniquement en cos ou uniquement en sin aussi!)

Autre représentation: on peut alors utiliser le concept de spectre en fréquence qui représente l'amplitude des différentes harmoniques qui le composent aux différentes fréquences.

Exemple : Note La au piano et au trombone. **DIAPO**

Même note mais pas même signal : même fréquence fondamentale mais les harmoniques ne sont pas les mêmes (termes en sinus et en cosinus).

On a notre signal périodique décomposé en une somme de signaux à fréquences connus, et grâce à la linéarité en connaissant la réponse de chaque sous signaux on peut obtenir la réponse totale.

3) Outil numérique : exemple d'un signal créneau

→ Montrons l'exemple de la décomposition de Fourier sur un signal créneau.

Soit un signal créneau. En appliquant les formules on a $s(t)$: **DIAPO** (uniquement ici harmonique impaires mais on s'attarde pas sur ça!). En superposant toutes ces harmoniques on peut retrouver notre signal initial.

→ *Programme python* (Signal créneau qu'on transforme en signal fourier puis on les ajoute.) On va voir l'influence du nombre d'harmonique (normalement somme à l'infini pour avoir une représentation parfaite).

(On observe qu'il y a des petites imperfections : Effet Gibbs → erreur quand nombre harmonique grand : https://fr.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A9nom%C3%A8ne_de_Gibbs).

On a vu qu'on pouvait décomposer notre signal, et à l'aide de la fonction de transfert, on peut associer à n'importe quel signal périodique sa réponse. Mais comment peut-on agir dessus?

II - Filtrage linéaire

Maintenant qu'on a le spectre et les amplitudes associées, on va essayer d'atténuer, d'amplifier certaines de ces amplitudes → Filtre linéaire

1) Définitions

Système linéaire, invariant par rapport au temps dont $H(w)$ n'est pas constante par rapport à w . Il peut amplifier, atténuer ou déphaser chaque composante spectrale sans en ajouter (linéarité).

-Ordre d'un filtre: ordre de l'équation différentielle décrivant le système (en représentation temporelle) (Circuit RC : dérive première en tension → filtre ordre 1)

-Gain (dB): action du filtre sur les amplitudes telle que $G(w)=20.\log(|H(w)|)$ (unité de dB pour avoir un rapport de puissance)

-Phase (rad ou °): action sur les phases telle que $\Phi(w)=\arg(H(w))$

-Pulsation de coupure w_c : définie $H(w_c)=H_{\max}/\sqrt{2}$ (revient à puissance divisé par 2)

-Bande passante: ensemble de w telle que $H(w)>H_{\max}/\sqrt{2}$ (la plage d'action de notre filtre!!)

Ces caractéristiques nous permettent de prévoir le comportement du filtre.

2) Diagrammes de Bode

Représentation graphique de l'action du filtre sur le signal d'entrée c'est la représentation en diagramme de Bode:

- courbe du gain du filtre : tracé de $G(w)$ en échelle logarithmique
- courbe de phase: tracé de $\Phi(w)$ en échelle log

Contient toute les caractéristique précédentes.

Etude des comportements asymptotiques, cas du filtre RC : **DIAPO**

Calcul de $|H(w)|$ et $\Phi(w)$

→ Expliquer le but de ces 2 graphes en fonction de la fréquence pour comprendre comment agit notre filtre en fonction de w .

Cas du circuit Rc est un filtre passe bas car il laisse passer uniquement les basses fréquences (fréquences de coupure environ de 100 Hz)

3) Différents types de filtres

Passe-bas d'ordre 1, Passe haut d'ordre 1, Passe bande d'ordre 2 **DIAPO**

→ Programme python : Comparaison passe-bas d'ordre 1 et d'ordre 2 (ordre 2 phénomène de résonance)

→ Programme python : on applique un filtre à un signal (Tf du signal d'entrée, et du signal filtré)

III - Modulation d'Amplitude

On va s'intéresser à une application qui peut illustrer les notions vu précédemment.

1) Principe et définitions

Objectif: Utiliser la meilleure propagation des ondes électromagnétiques à plus hautes fréquences pour transporter de l'information sur de longues distances (Exemple : la radio). Impossibilité de crier et de propager sa voix sur de grandes distances.

Comment faire?

-Multiplication de deux signaux : la porteuse (de fréquence élevée) et le signal modulant (de fréquence plus basse, contenant l'information)

-Porteuse: $v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$

-Signal modulant: $v_m(t) = A_o + A_m \cos(\omega_m t)$ avec $\omega_m \ll \omega_p$

$s(t) = v_m(t) \cdot v_p(t)$ **DIAPO**

Taux de modulation m : $m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = A_m / A_o$

2) Spectre du signal modulé

Le développement de $s(t)$ nous donne **DIAPO**. On fait apparaître de nouvelles harmoniques

→ Application non linéaire (création d'harmonique)

Son spectre est donc : **DIAPO**

On a déplacé ω_m vers des pulsation beaucoup plus élevée, on peut maintenant transporter notre signal sur de longue distance.

Maintenant il faut retrouver l'information dans notre signal → Démodulation

3) Démodulation

Objectif: récupérer l'information transmise

-Les techniques de récupération peuvent varier en fonction de la valeur de m, on s'intéresse à la démodulation synchrone : multiplication du signal modulé par le signal de la porteuse pour décaler à nouveau notre signal.

-Le développement de v_{dem} fait apparaître 5 harmoniques **DIAPO**

Or on sait que $\omega_m \ll \omega_p$, il nous reste donc uniquement ω_2 , on utilise un filtre pour récupérer $\omega_2 = \omega_m$: le signal contenant l'information!

Conclusion:

-Signal périodique peut se représenter par un spectre en fréquence (harmoniques et amplitudes associées) → caractérisation des signaux.

Signal non périodiques ? utilisation de la TF

-Traitement de ces signaux comme action sur ces harmoniques à l'aide de filtres

-Opérations non-linéaires : génération et déplacement des harmoniques

Remarques:

-Il aurait fallu commencer parce que c'est un signal puis dire qu'on veut le transmettre sans interférence avec d'autres signaux: aspect transport information + aspect physique a dvlpt.

-Faire qq constats sur les filtres linéaires pour pouvoir en cerner les limites

-III.2 montrer le spectre, et il manque l'étape de linéarisation.

-Manque des transitions notamment sur la modulation d'amplitude.

-Les programmes de lycée sont assez développé en acoustique donc ne pas perdre trop de temps sur les décompositions en série de Fourier et insister plus sur la synthèse d'un signal, le fait qu'un signal soit la somme de sinusoïdes.

-Pour plus d'informations ne pas hésitez à regarder les poly de montage de Philippe associé.

-Le titre est vague, on peut aussi parler du traitement numérique (échantillonnage, spectre d'un signal échantillonné, quantification)

Questions:

-Que se passe-t-il quand on met 2 filtres linéaires à la suite? Peut-on obtenir un diagramme de bode à partir de celui des 2 filtres? Les 2 filtres s'ajoutent. Si on ajoute 2 filtres passe-bas, donc fonction de transfert est le produit des 2. L'intérêt de ces diagrammes sur amplitudes → ils s'additionnent d'où l'intérêt de tracer ces diagrammes.

-Redressement simple alternance et bi-alternance est dû à une modification de phase uniquement (on ne touche pas à l'amplitude).

<https://sites.google.com/site/thierrybiaye2/home/01-redresseur-simple-et-double-alternance>

-Quel est l'intérêt de la modulation d'amplitude? Pouvoir transporter un signal basse fréquence (voix) et les transporter sur des longues distances : exemple cas de la radio, en se servant d'une porteuse. Avantage et inconvénient de la modulation d'amplitude?

[http://www.telecom.ulg.ac.be/teaching/notes/total1/elen008/node33_mn.html#:~:text=Son%20plus%20gros%20avantage%20est,modulation%20et%20de%20la%20d%C3%A9modulation.&text=La%20modulation%20d'amplitude%20implique,de%20base%20m\(t\).](http://www.telecom.ulg.ac.be/teaching/notes/total1/elen008/node33_mn.html#:~:text=Son%20plus%20gros%20avantage%20est,modulation%20et%20de%20la%20d%C3%A9modulation.&text=La%20modulation%20d'amplitude%20implique,de%20base%20m(t).)

-On pourrait faire de la modulation dans une pièce? de sorte qu'on entend que l'interlocuteur et pas le reste, de sorte de sélectionner la voix? Problème d'encombrement de bande, un signal consiste à aller chercher une information dans un signal physique en supposant a priori en connaissant la fréquence qui nous intéresse.

-Citez des filtres non linéaires/filtres linéaires Filtrage médian /

https://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre_lin%C3%A9aire#:~:text=Un%20filtre%20lin%C3%A9aire%20est%2C%20en.%C3%A0%20un%20signal%20d'entr%C3%A9e.

-Comment on fait un multiplieur? Comment on fait un sommateur? En utilisant un AOP

<http://kudelsko.free.fr/articles/multiplieur.htm>

- Quel composant a une caractéristique courant-tension? Diode (caractéristique expo)
- Comment varient les coefficients des différentes harmoniques en fonction du signal, s'il est continu ou discontinu ? Si il est discontinu, les coeff s'atténuent en $1/n$ et si c'est continu, les coefficients s'atténuent en $1/n^2 \Rightarrow$ on peut mettre l'accent là-dessus !
<http://mavy33.free.fr/cours%20sup/32-105%20%C3%A9l%C3%A9ctrocin%C3%A9tique%20analyse%20spectrale.pdf>
- Repliement de spectre? Lorsqu'on ne respecte pas le critère de Shannon :
<https://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/stagetdsi2012/bourgeoisa2.pdf>
- A quoi sert un spectre ? Permet d'obtenir les caractéristiques de la réponse d'un **système linéaire** en utilisant une **fonction de transfert**.
- On cherche souvent à virer du 50Hz, d'où il sort ? composante secteur EDF
- Quelle est la différence entre TF, FFT et DSF ? Pour les signaux périodiques, la décomposition en Série de Fourier (DSF). Pour les signaux non périodiques, il s'agit de la Transformée de Fourier (TF). La FFT est un outil mathématique de calcul pour calculer la transformation de Fourier discrète.
- FFT pour Fast Fourier Transform : pourquoi Fast (aide : ça veut dire rapide) ? Il faut faire attention à quelque chose quand on fait une FFT ? Comment faut-il choisir le nombre de points de l'échantillonnage si on prévoit une analyse par la FFT après l'acquisition ? La fréquence du signal et des harmoniques doit être des multiples de $1/T_{\text{obs}}$ pour que le spectre obtenu ait 'allure c-dessus sinon il apparaît des raies parasites car l'algorithme calcule le spectre pour des signaux à des fréquences multiple de $1/T_{\text{obs}}$.
- Que savez-vous sur les fenêtres de pondération ? Pour observer un signal sur une durée finie, on le multiplie par une fenêtre de pondération (exemple fonction porte) .L'intérêt principal des fenêtres d'observation est de limiter les effets de troncature. En effet, le principe de calcul de la FFT est de compléter par des zéros les valeurs de la mesure pour aller jusqu'à la puissance de 2 la plus proche de l'intervalle choisi. Cette mise à zéro brutale entraîne l'apparition de lobes secondaires.
- C'est quoi le théorème de Shannon ? La fréquence d'échantillonnage doit être au moins 2 fois supérieur à la fréquence maximale du signal.
- Écrivez la réponse d'un SLIT à une combinaison linéaire de sinus. .
- D'où vient la convention de la bande-passante à -3 dB ? Cela vient de la définition en puissance ($P_{\text{max}}/2$)
- Taille des antennes nécessaire si on n'effectue pas de modulation ? Haute fréquence environ 3 m mais pour B.F 10Hz \rightarrow 15km
- Démodulation synchrone : conditions sur le filtre RC ? fréquence de coupure ($f_c=1/2\pi RC$)supérieur à la fréquence à récupérer mais inférieur aux autres.