

Traitement d'un signal. Étude Spectral

Bauduin Anatole

PLAN

Niveau : cycle universitaire

Pré-requis :

- bases d'électrocinétique,
- résolution d'équations différentielles,
- notation complexe

I. Analyse fréquentielle

1. Équations différentielles linéaires et fonction de transfert
2. Représentation fréquentielle : série de Fourier
3. Outil numérique : exemple d'un signal créneau

II. Filtrage linéaire

1. Définitions
2. Diagrammes de Bode
3. Différents types de filtres

III. Modulation d'Amplitude

1. Principe et définitions
2. Spectre du signal modulé
3. Démodulation

INTRODUCTION

- Expression de $i(t)$ et $u(t) \Rightarrow$ équation différentielles décrivant le système considéré
- Évolution temporelle des grandeurs, exemple : charge d'un condensateur
- Réponse à une entrée
- Traitement de l'information ?

I. ANALYSE FRÉQUENTIELLE

I.1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET FONCTION DE TRANSFERT

- De façon générale, pour un système linéaire dont les caractéristiques de ses composants sont indépendantes du temps, on peut exprimer une équation différentielle du type :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}$$

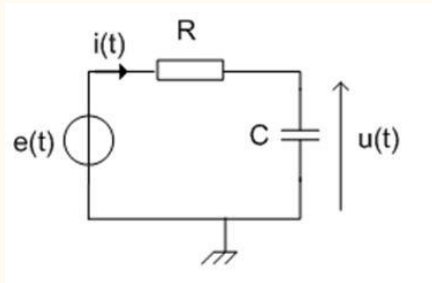
Avec :

$s(t)$, la sortie du système,

$e(t)$, l'entrée,

a_k et b_k des coefficients constants

- Revenons au circuit RC :



$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u(t) = \frac{1}{RC} e(t)$$

Avec :

$u(t)$, la tension aux bornes de C,

$e(t)$, l'entrée, la tension de forçage

I.1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET FONCTION DE TRANSFERT

- On néglige le régime transitoire pour ne s'intéresser qu'au régime sinusoïdal forcé
→ Notation complexe : $\tilde{e}(t) = Ee^{j(\omega t + \phi)}$ où ω est la pulsation de forçage
 $\tilde{s}(t) = Se^{j(\omega t + \phi)}$
- Fonction de transfert $H(\omega)$: rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée tel que,

$$\boxed{H(\omega) = \frac{\tilde{s}(t)}{\tilde{e}(t)}} \rightarrow H(\omega) = \frac{b_0 + \sum_{k=1}^m b_k (j\omega)^k}{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (j\omega)^k} \quad \text{Caractérise entièrement la réponse du système pour un forçage de pulsation donnée !}$$

- Cas du RC : $(j\omega)\tilde{u} + \frac{1}{RC}\tilde{u} = \frac{1}{RC}\tilde{e}$ et donc $\boxed{H_{RC}(\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1}{1+jRC\omega}}$

I.2. REPRÉSENTATION FRÉQUENTIELLE : SÉRIE DE FOURIER

Objectif : décomposer n'importe quel signal périodique comme une somme de cosinus et de sinus pour exploiter la linéarité des équations différentielles

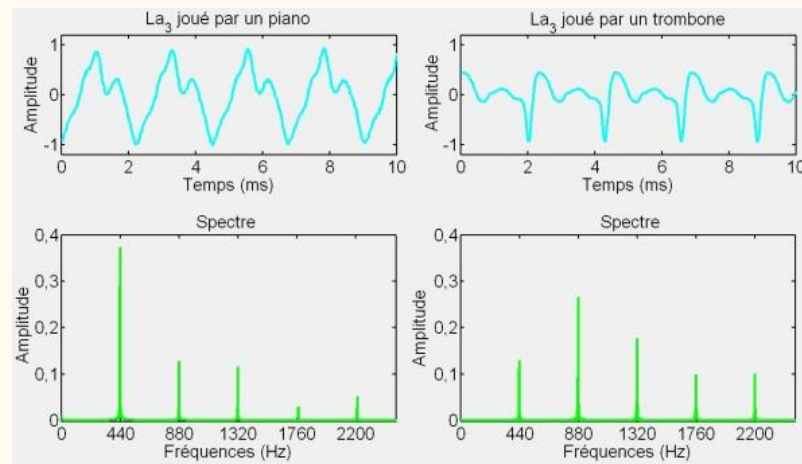
- Soit le signal $s(t)$, alors :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$

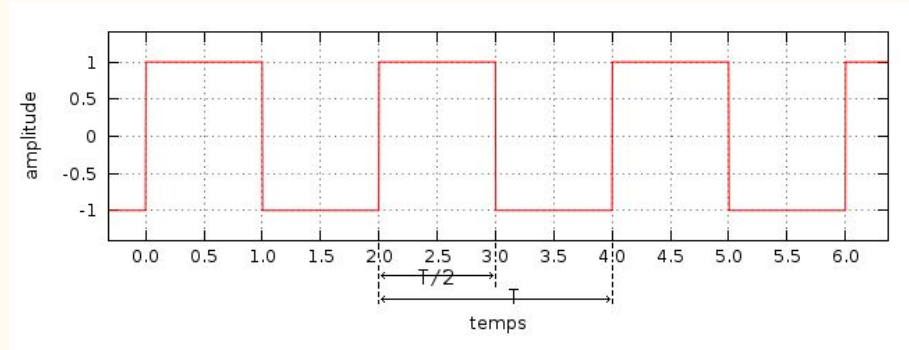


Exemples de spectres

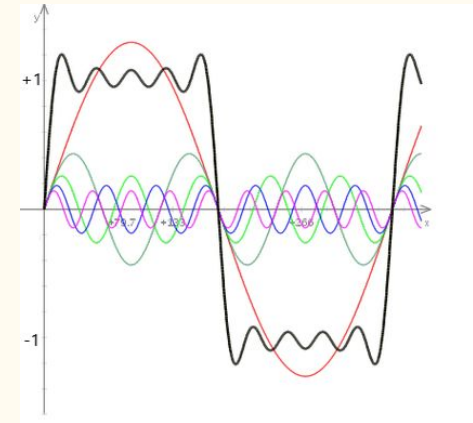
- Spectre d'un signal : amplitude des différentes harmoniques qui le composent
- Équivalence temps-fréquence

I.3. OUTIL NUMÉRIQUE : SIGNAL CRÉNEAU

- Soit un signal créneau tel que :



- Ré-écrit en série de Fourier :
$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$$
- Programme Python



II. FILTRES LINÉAIRES

II.1. DÉFINITIONS

- Système linéaire, invariant par rapport au temps dont $H(\omega)$ n'est pas constante par rapport à ω . Il peut amplifier, atténuer ou déphaser chaque composante spectrale sans en ajouter (linéarité).
- Ordre d'un filtre : ordre de l'équation différentielle décrivant le système (en représentation temporelle)
- Gain (dB) : action du filtre sur les amplitudes telle que, $G(\omega) = 20\log(|H(\omega)|)$
- Phase (rad ou °) : action sur les phases telle que, $\phi(\omega) = \arg(H(\omega))$
- Pulsation de coupure ω_c : définie par $H(\omega_c) = H_{max}/\sqrt{2}$
- Bande Passante : ensemble des ω telles que $H(\omega) > H_{max}/\sqrt{2}$
- Ces caractéristiques nous permettent de prévoir le comportement du filtre

II.2. DIAGRAMMES DE BODE

- Représentation graphique de l'action du filtre sur le signal d'entrée :
 - courbe de gain du filtre : tracé de $G(\omega)$ en échelle logarithmique
 - courbe de phase : tracé de $\phi(\omega)$ en échelle log
- Contient toutes les caractéristiques précédentes
- Étude des comportements asymptotiques, cas du filtre RC : $H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

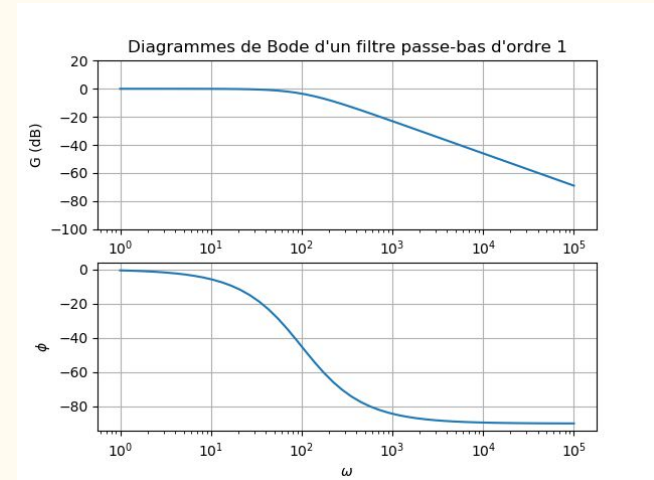
$$-\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)| = 1 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 0$$

$$-\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(\omega)| = \frac{\omega_c}{\omega} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) = -20\log(\omega) + Cste$$

$$\phi(\omega) = \arg(H(\omega)) = -\arctan(\omega/\omega_c)$$

$$-\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = 0$$

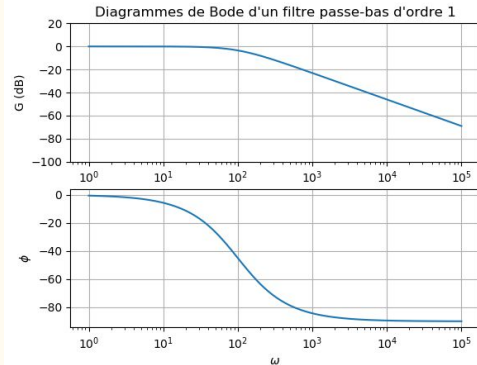
$$-\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \phi(\omega) = -\pi/2$$



II.3. DIFFÉRENTS TYPES DE FILTRES

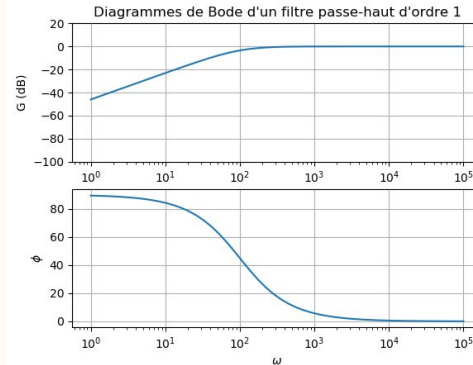
Passe-bas d'ordre 1

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} H_0$$



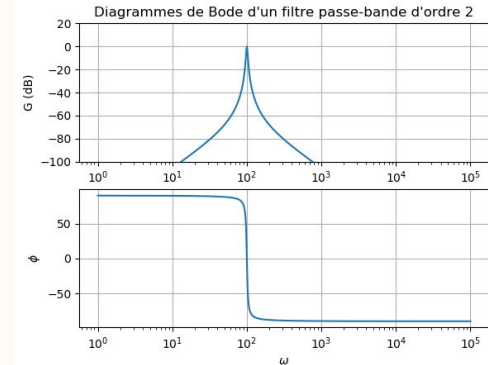
Passe-haut d'ordre 1

$$H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} H_0$$



Passe-bande d'ordre 2

$$H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c Q}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_c})^2 + j\frac{\omega}{\omega_c Q}} H_0$$



Exemple du Quartz

III. MODULATION D'AMPLITUDE

III.1. PRINCIPE ET DÉFINITIONS

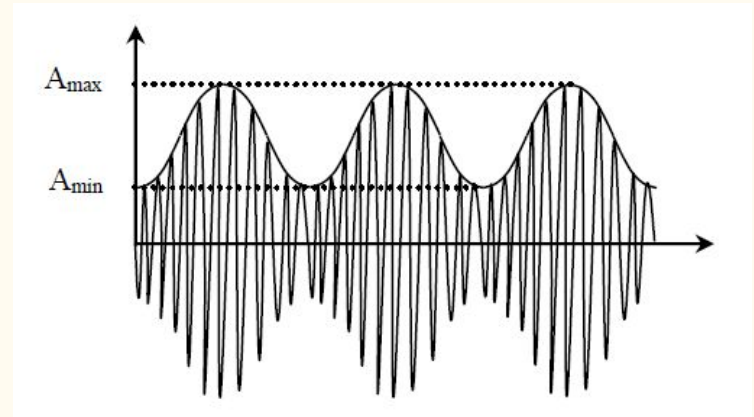
Objectif : utiliser la meilleure propagation des ondes électromagnétiques à plus hautes fréquences pour transporter de l'information sur de longues distances

- Multiplication de deux signaux : la porteuse (de fréquence élevée) et le signal modulant (de fréquence plus basse, contenant l'information)
- Porteuse : $v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$
- Signal modulant : $v_m(t) = A_0 + A_m \cos(\omega_m t)$
Avec $\omega_m \ll \omega_p$

- $s(t) = v_p(t) \cdot v_m(t) = A_p \cos(\omega_p t) [A_0 + A_m \cos(\omega_m t)]$

- Taux de modulation m :

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{A_m}{A_0}$$

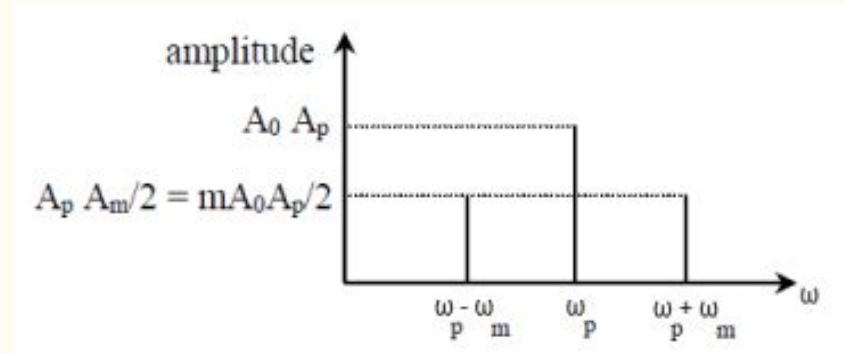


III.2. SPECTRE DU SIGNAL MODULÉ

- Le développement de $s(t)$ nous donne :

$$s(t) = A_p[A_0 \cos(\omega_p t) + \frac{A_m}{2} \cos((\omega_p + \omega_m)t) + \frac{A_m}{2} \cos((\omega_p - \omega_m)t)]$$

- Son spectre est donc :
(Apparition de la non-linéarité !)



III.3. DÉMODULATION

Objectif : récupérer l'information transmise

- Les techniques de récupération peuvent varier en fonction de la valeur de m , on s'intéresse à la démodulation synchrone : multiplication du signal modulé par le signal de la porteuse
- Le développement de $v_{\text{dem}}(t) = [v_p(t) \cdot v_m(t)] \cdot v_p(t)$ fait apparaître 5 harmoniques :
 - $\omega_1 = 0$
 - $\omega_2 = \omega_m$
 - $\omega_3 = 2\omega_p$
 - $\omega_4 = 2\omega_p + \omega_m$
 - $\omega_5 = 2\omega_p - \omega_m$
- Hors $\omega_m \ll \omega_p$, donc, en filtrant $v_{\text{dem}}(t)$, on peut récupérer uniquement $\omega_2 = \omega_m$, le signal contenant l'information !

CONCLUSION

- Signal périodique → Spectre en fréquence : harmoniques et amplitudes associées
→ Caractérisation des signaux
Signaux non périodiques ? → Transformée de Fourier
- Traitement de ces signaux comme action sur ces harmoniques
- Opérations non-linéaires → génération et déplacement des harmoniques

Bibliographie

- Electrocinétique, G.Rosset, Précis, Breal
- Electronique 2, F. Manneville, J. Esquieu, Dunod
- Philippe <3