LP09 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Remarques du Jury : La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées. Les limites de ce modèle sont souvent méconnues. Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante. La notion de viscosité peut être supposée acquise.

Niveau : CPGE (PC)
Prérequis : - Statique et cinématique des fluides, viscosité, équation de Navier Stokes.

Introduction : Lors du derniers cours, nous avions commencé à nous intéresser à la dynamique des fluides. Nous avions appliqué le PFD à un élément de fluide dV, en considérant un fluide incompressible et Newtonien. On aboutissait à l'équation de Navier Stokes :

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

Cette équation est à la base de la mécanique des fluides, mais elle reste difficile à résoudre dans bien des cas. Dans ce cours, on va construire un modèle, le modèle de l'écoulement parfait, qui permet de simplifier cette équation, pour la résoudre plus facilement dans certaine situation.

I - L'approximation de l'écoulement parfait.

1) Hypothèse et conséquences

La simplification du modèle du modèle de l'écoulement parfait consiste à négliger tous les phénomènes de transports diffusifs (notamment la viscosité, et aussi les diffusions de thermiques !). Cela va donc nous simplifier un terme de l'équation de NS.

Un fluide parfait est rigoureusement sans viscosité : seul l'Hélium supercritique est sans viscosité (effets quantiques). On ne va donc jamais pouvoir considérer nos fluides comme étant parfait, mais on pourra supposer que l'écoulement est parfait sous certaines conditions.

Un écoulement parfait est donc un écoulement où il n'y a pas de phénomènes de diffusion. L'évolution du fluide est adiabatique (pas de diffusion thermique) et réversible (pas de cause d'irréversibilité puisqu'on a enlevé les causes de frottements) : on a donc un écoulement isentropique. Cette isentropie est très importante dans le développement de la propagation des ondes acoustiques.

Enfin, le fait que l'on considère qu'il n'y a pas de viscosité change les conditions limites au niveau d'un obstacle pour notre fluide : si la vitesse normale à la surface doit être nulle, la vitesse tangentielle elle n'est plus soumise à aucune condition :

v.**n** = 0, pas de condition sur **v**.**t**

Alors oui, le modèle a l'air intéressant car il permet pas mal de simplifications, mais quand est-ce qu'il est réellement valable?

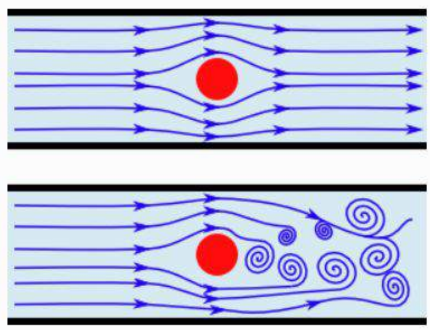
2) Domaine de validité

La viscosité, dont on cherche à se débarrasser, correspond aux contraintes tangentielles et aux forts gradients : elle joue un rôle prépondérant dans les zones d'obstacles. On va donc étudier ce qu'il se passe près d'un obstacle.

Avant toute chose, on va introduire un nombre qui caractérise l'écoulement : le nombre de Reynolds. On définit le nombre de Reynolds comme l'ordre de grandeur du transport de quantité de mouvement convectif sur le phénomène diffusif :

$$Re \sim \frac{OG(\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v})}{OG(\eta\Delta\vec{v})} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Avec U la vitesse caractéristique de l'écoulement et L la longueur caractéristique sur laquelle la vitesse varie (donc celle de notre objet qui perturbe l'écoulement). A priori, on veut négliger la viscosité, donc notre modèle semble plus compatibles avec des grands nombres de Reynolds. Si on regarde au niveau d'un obstacle :



(On a déjà dit que, pour un faible nombre de Reynolds, on est certain d'avoir un écoulement non parfait). En revanche, dans le cas d'un trop grand nombre de Reynolds (on prend souvent Re>2000), l'obstacle peut entraîner des écoulements turbulents : ce n'est pas souhaitable dans notre modèle.

On définit pour notre obstacle la couche limite : c'est la zone où se concentre tous les effets de viscosité :

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

A écoulement à fort nombre de Reynolds, on remarque $\delta \ll L$. En revanche des turbulences peuvent avoir lieu dans le sillage de l'obstacle.

Donc on peut considérer que l'écoulement est parfait si :
- On a un fort nombre de Reynolds (Re>>1 mais Re<2000)
- On se situe hors de la couche limite (dedans, Navier Stokes Classique)

Quelques ODG (dans nos exemples, on pourrait se dire que c'est l'obstacle qui bouge et le fluide qui est immobile, mais il suffit de se placer dans le ref de l'obstacle ;))

- Pour un nageur dans l'eau, en ordre de grandeur, L = 2m, ρ = 1000kg/m^3, U = 2m/s et pour l'eau la viscosité dynamique de l'eau est 10^{-3} Pa.s. Donc en calculant Re = 4.10^6, et une couche limite de l'ordre du mm. L'écoulement est très turbulent, on ne pourra pas le décrire comme parfait près du nageur. Avec l'eau on aura souvent des écoulements turbulents.

Maintenant que notre modèle est établi, voyons ce que cela donne au niveau de l'équation de NS.

3) Equation d'Euler

Et bien il suffit d'enlever le terme de viscosité de Navier-Stokes, et pag ça fait l'équation d'Euler.

II - Théorème de Bernoulli

On va démontrer un théorème qui peut s'appliquer sous certaines conditions pour un fluide parfait. Ce théorème est très important pour les classes prépa !

1) Demonstration (CPGE)

On va démontrer le théorème de Bernoulli dans le cadre d'un écoulement parfait, stationnaire,incompressible et irrotationnel. On part de l'équation d'Euler :

Euler : $\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{\text{station}} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}(P) + \rho\vec{g}$

On a $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\wedge\overrightarrow{rot}(v) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)$

incomp

et, en cartésien, si $\vec{g} = -g.\vec{u_z}$: $\rho\vec{g} = -\overrightarrow{grad}(\rho g z)$

Donc : $\rho\, grad\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{grad}(P) - grad(\rho g z)$

Par linéarité et incompressibilité :

$grad\left(\rho\frac{v^2}{2} + \rho g z + P\right) = 0$

Soit $\rho v^2/2 + \rho g z + P = cst$ Théo de Bernoulli

Il s'agit d'une équation de conservation de l'énergie !

2) Limite de validité

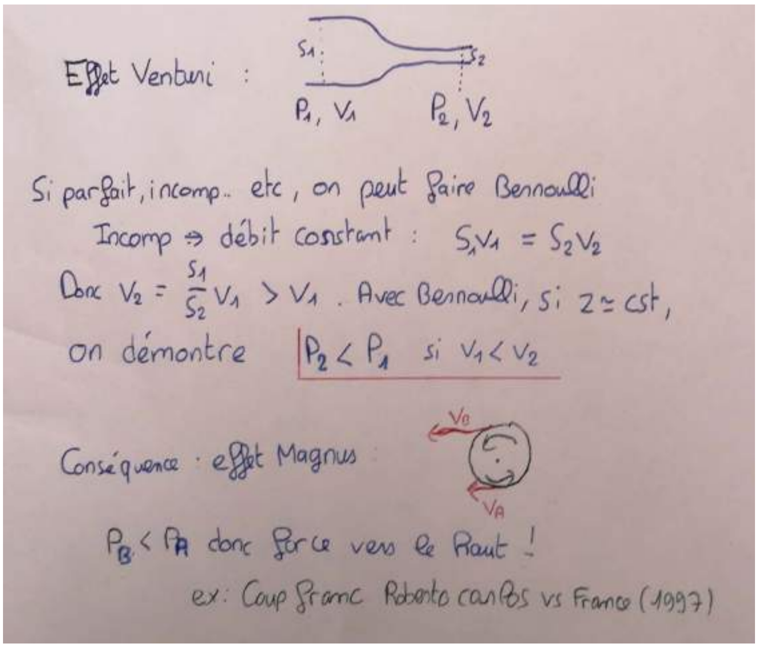
Ré-insister sur les hypothèses de Bernoulli (parfait, stationnaire,incompressible et irrotationnel).

On a fait beaucoup d’hypothèse pour que démontrer notre théorème de Bernoulli. Sans l’hypothèse “irrotationnel”, Bernoulli n’est valable que le long d’une trajectoire de particule, ce qui en régime stationnaire revient aux lignes de courant.

Remarques pour les questions : il existe d’autres formes de Bernoulli avec moins d’hypothèse : par exemple on peut trouver un théorème de Bernoulli avec seulement comme hypothèse l’écoulement parfait incompressible irrotationnel, le caractère irrotationnel permet de définir un potentiel des vitesses et donc d’avoir une équation de Bernoulli hors régime stationnaire. Mais ca n’est pas du tout vu en CPGE.
On peut aussi le démonter par conservation de l’énergie.

III - Applications du théorème de Bernoulli

1) Effet Venturi et effet Magnus



Attention en réalité la différence de vitesse du fluide est dû à des forces de viscosité avec la balles donc on est pas totalement dans des conditions d’écoulement parfait mais ça marche bien.
Effet Magnus explication et expérience : https://www.youtube.com/watch?v=LoneCLNmqt0

2) Tubes de Pitot

Expérience que l’on peut faire en vrai si on a ce qu’il faut (soufflerie).Très bien détaillée dans le poly de Philou. Une petite vidéo est proposée sur le site.

Conclusion : Hors des frontières avec des obstacles (et donc hors de la couche limite), on peut décrire le mouvement d’un fluide avec l’équation d’Euler, qui permet d’exprimer des quantités conservées. Si les conditions sont réunies, on peut même appliquer le théorème de Bernoulli qui permet d’expliquer de nombreux phénomènes. Reste à voir ce qu’on fait des écoulements visqueux, et aussi parler des effets de surface (tension superficielle).

Biblio :

- Dunod tout en un PC/PC*
- Guyon Hulin Petit

Questions/remarques :

- Différence physique entre parfait et turbulent ? Les deux ont un grand nombre de Reynolds pourtant…

La turbulence est associée à une cascade d’énergie des grandes échelles vers les plus petites, où la viscosité joue un rôle important et permet de diffuser l’énergie. Le modèle de l’écoulement parfait, lui néglige l’influence de la viscosité à toutes les échelles.

- Comment qualifier l’écoulement loin d’une aile d’avion ?

Si on suit la logique de la leçon et comme l’air est peu visqueux, parfait ! Par contre il ne faut pas se placer dans le sillage de cette aile, où on aura des turbulences.

- À quoi ressemble la couche limite autour d’une aile profilée ? C’est quoi le décollement de la couche limite ?

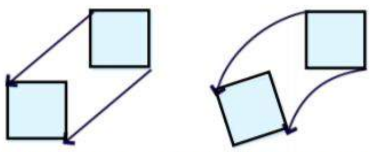
Voir ça : https://fr.wikipedia.org/wiki/Portance_(a%C3%A9rodynamique)
Et pour le décollement :
http://hmf.enseeiht.fr/travaux/bei/beiep/content/g08/decollement-couche-limite#:~:text=Le%20d%C3%A9collement%20de%20couche%20limite,ext%C3%A9rieure%20%C3%A0%20une%20vitesse%20nulle.&text=Le%20point%20de%20d%C3%A9collement%20de,ou%20le%20frottement%20s'annule.

- C’est quoi le vecteur tourbillon ?

On a la vorticité **ω** = **rot**(v), et le vecteur tourbillon est la moitié de ce vecteur :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

Ce vecteur représente le vecteur rotation (locale) d’une particule de fluide. Localement, le champ des vitesses d’un fluide renseigne sur l’existence de tourbillons dans ce fluide par l’intermédiaire de son rotationnel.



Translation simple à gauche, rotation à droite menant à du tourbillon

Un écoulement est dit non tourbillonnaire (ou irrotationnel) si le vecteur tourbillon est nul en tout point. Dans le cas contraire, l’écoulement est dit tourbillonnaire.

Il ne faut pas confondre turbulences et tourbillons : un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_\theta$ est tourbillonnaire (comme on peut le vérifier en coordonnées cylindriques), mais il ne s’agit pas d’une turbulence.