

# LP 04 : Précession dans les domaines macroscopiques et microscopiques

Remarque Jury : L'exposé doit être équilibré entre la description des effets macroscopiques et microscopiques. Il n'est pas souhaitable de faire un catalogue exhaustif des applications mais plutôt d'en traiter quelques-unes de manière complète. Le/la candidat(e) doit être capable de trouver l'orientation et le sens des effets gyroscopiques sur des exemples simples. Afin de bien équilibrer la leçon, il est judicieux de ne pas passer trop de temps sur les aspects cinématiques. L'étude de l'un des domaines, macroscopique ou microscopique, ne doit pas conduire au sacrifice de l'autre : un certain équilibre est attendu. Il est nécessaire d'avoir suffisamment de recul en mécanique des solides pour préciser l'origine des formules avancées.

## Bibliographie:

<https://www.ph-suet.fr/agr%C3%A9gation/>

Pérez. Mécanique, Fondements et applications. Dunod.

<http://thierry.chave.free.fr/P5.pdf>

<https://www.faidherbe.org/site/cours/dupuis/rmn2.htm>

Niveau : Licence

PR : - Mécanique du point et du solide : Théorème du moment cinétique, moment d'inertie

- Mécanique quantique : États propres, équation de Schrödinger
- Notion magnétisme : moment magnétique, dipôle magnétique

## **Introduction:**

Manip: Mise en rotation d'une toupie.

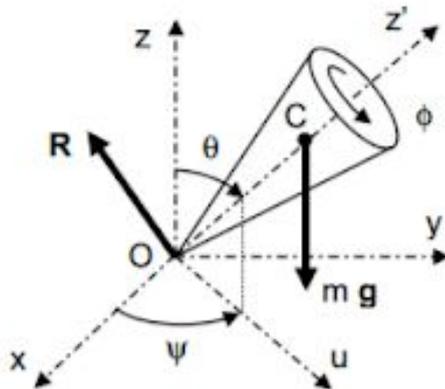
On remarque qu'il est impossible de faire tenir une toupie sans mouvement circulaire. Mais, lorsqu'elle est en rotation, on remarque qu'elle reste debout : c'est l'effet gyroscopique. Tout objet en rotation autour d'un axe est soumis à l'effet gyroscopique. C'est la capacité qu'a cet objet à conserver son axe de rotation ou, de façon plus précise, à conserver son moment angulaire. La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un objet. Lors de la précession, l'angle que fait l'axe de rotation avec une direction donnée reste fixé. L'axe de rotation décrit ainsi au cours du temps un cône dont l'axe est la direction fixée.

(Toutes les observations cinématiques sont faites dans le référentiel du laboratoire, tous les vecteurs sont projetés dans la base de Résal. )

## **I/ Mouvement d'un solide autour d'un point fixe**

### **1) Position du problème**

- Définition du corps solide: On s'intéresse à un solide symétrique, de masse  $m$  et soumis à la gravité  $g$  dans le référentiel du laboratoire fixe en  $O$ .
- Angles d'Euler



Pour décrire son mouvement, on utilise deux systèmes de coordonnées : un fixe  $(x, y, z)$  (lié à un référentiel terrestre supposé galiléen) et un mobile  $(x', y', z')$  (lié au référentiel de la toupie). On considère que leurs origines sont confondues (point  $O$ ) : C'est ainsi un point fixe du solide (Point de contact de la toupie avec la table). Pour connaître la position de la toupie, il suffit de connaître l'orientation du repère mobile par rapport au fixe. Pour cela, on introduit les trois angles d'Euler.

$\psi$  : angle de précession : rotation autour de  $Oz$

$\theta$  : angle de nutation : angle entre  $z$  et  $z'$ .

$\phi$  : angle de rotation propre : angle de rotation autour de l'axe  $Oz'$ .

axe  $u$  : la ligne de noeuds : Intersection entre les plans  $(Oxy)$  et  $(Ox'z')$

Les trois angles d'Euler déterminent complètement l'orientation du corps.

Pour déterminer le vecteur-rotation de la toupie par rapport au référentiel terrestre  $(x, y, z)$ , on réalise une combinaison linéaire de chaque vecteur rotation relatifs aux angles :

$$\mathbf{\Omega} = \phi^\circ \mathbf{e}_{z'} + \theta^\circ \mathbf{u} + \psi^\circ \mathbf{e}_z$$

cette partie est la vitesse angulaire de la toupie

→ Cf diapo (décomposition)

Afin de décrire le mouvement du solide, on utilise le théorème du moment cinétique (TMC) :

$$d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{M}_O$$

## 2) Moment cinétique

On sait que le moment cinétique d'un solide en rotation est :  $\mathbf{L}_O = [\mathbf{I}_O] \cdot \mathbf{\Omega}_{\text{sol}/R}$

$[\mathbf{I}_O]$  : Le tenseur d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses d'un solide dans le référentiel choisi.

Problème: Si la distribution de masse par rapport à la base de projection choisie change alors  $[\mathbf{I}_O]$  change, il faut qu'il soit indépendant du temps afin de résoudre le TMC.

Solution: On choisit alors la base de Résal comme base de projection, dans laquelle la distribution de masse ne varie pas, et ainsi  $[\mathbf{I}_O]$  sera indépendant du temps :  $\text{Re} = (\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z)$

Soit  $\mathbf{\Omega}_{\text{Re}/R} = \theta^\circ \mathbf{e}_u + \psi^\circ \mathbf{e}_z$

$[\mathbf{I}_O]$  est diagonal dû à sa symétrie de révolution =  $[\mathbf{I}_1, 0, 0][0, \mathbf{I}_2, 0], [0, 0, \mathbf{I}_3]$

On écrit  $L_o(\mathbf{Re})$ ,  $\Omega_{\text{Re/R}}$  et  $\Omega_{\text{Sol/R}}$  dans la base de Résal sachant que  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_w \cdot \sin(\theta) + \mathbf{e}_{z'} \cdot \cos(\theta)$   
 On a ainsi  $L_o(\mathbf{Re})$ .

### 3) Approximation gyroscopique

On dit qu le mouvement autour d'un point fixe d'un solide S (ayant la symétrie de révolution) satisfait l'approximation gyroscopique si la vitesse de rotation autour de son axe est très grande devant les autres, soit  $\theta$  et  $\psi$  constant :  $\Omega_{\text{sol/R}} \approx \varphi^\circ \mathbf{e}_{z'}$

Ainsi  $L_o(\mathbf{Re}) = I_3 \cdot \varphi^\circ \cdot \mathbf{e}_{z'}$

### 4) Le mouvement de précession : TMC

On utilise la formule de Bour pour avoir  $dL_o/dt(\mathbf{R}) = dL_o/dt(\mathbf{Re}) + \Omega_{\text{Re/R}} \wedge L_o(\mathbf{Re})$

**ATTENTION A CETTE FORMULE!!!**

Puis on applique le TMC sachant que le solide est soumis à la pesanteur donc:

$$\text{On obtient : } \frac{dL_o}{dt}(\text{dans R}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \ddot{\varphi} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

$$\text{Puis, on calcule } \overline{M_{\text{ext}}} = \overline{OC} \wedge m\mathbf{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{vmatrix}$$

On obtient 3 équations :

$$I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} = mgl \quad (1)$$

$$-\dot{\theta} I_3 \dot{\varphi} = 0 \quad (2)$$

$$I_3 \ddot{\varphi} = 0 \quad (3)$$

Les 3 équations nous permettent de conclure que la norme du moment cinétique est constant (3), que sa composante selon z est constant ( $\theta = \text{constant}$ ) donc  $L_{oz}$  constant (2) et de déduire la formule permettant de calculer la vitesse de précession (1).

→  $L_o$  décrit un cône de sommet O, d'axe Oz défini par le champ de pesanteur et de demi angle  $\theta$ .

Animation : <http://serge.bertorello.free.fr/astrophys/mouvements/mvmts14.html>

L'axe de rotation propre Oz' précession autour de la direction de  $\mathbf{g}$ .

L'effet gyroscopique c'est la capacité d'un solide en rotation à résister au changement de son orientation, il effectue un mouvement de précession pour conserver son moment cinétique. Ce mouvement de précession à angle constant suppose évidemment que l'on ait négliger les forces de frottement. Dans le cas contraire,  $\psi^\circ$  et  $\varphi^\circ$  s'affaiblissent et  $\theta$  augmente, jusqu'à la valeur pi à l'équilibre qui l'orientation de l'axe du solide selon le champ de pesanteur. De plus si aucune force s'appliquent sur le solide alors  $dL_o/dt = 0$  et  $L_o = \text{constant}$ , donc l'axe Oz' reste fixe.

Application : (voir Perez mais pas vraiment le temps de la faire à l'oral.)

Une toupie de rayon de base  $r = 5 \text{ cm}$  et de hauteur  $h = 10 \text{ cm}$ , tourne à la vitesse  $\Omega = 50 \text{ tr/s}$ . Son moment d'inertie est  $I_{Oz'} = 3 m r^2 / 10$  et son centre de masse tel que  $a = 3 h / 4$ . Sa vitesse de précession est :

$$\omega = \frac{m g a}{I_{Oz'} \Omega} = \frac{5 g h}{2 r^2 \Omega} = 3,12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

et sa période :

$$T = \frac{2 \pi}{\omega} = 2 \text{ s}.$$

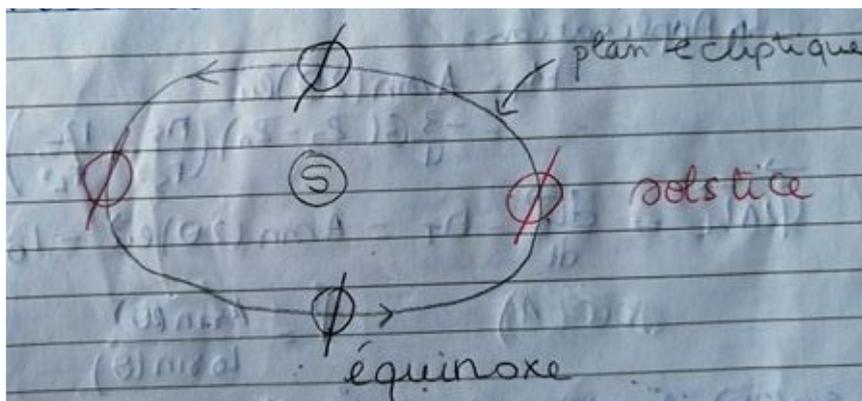
**Rq :** La masse de la toupie n'intervient pas dans l'expression de la vitesse de précession. D'autre part, l'approximation gyroscopique est vérifiée car ;  $\Omega = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \gg \omega = 3,12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## II) Conséquence dans le domaine macroscopique

Tout comme l'axe de rotation d'une toupie qui change de direction lorsque la toupie tourne rapidement sur elle-même, l'axe de rotation de la Terre tourne lentement.

### 1) Mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil

On sait que le Soleil se trouve dans le plan de l'écliptique ( plan de rotation de la Terre autour du Soleil).



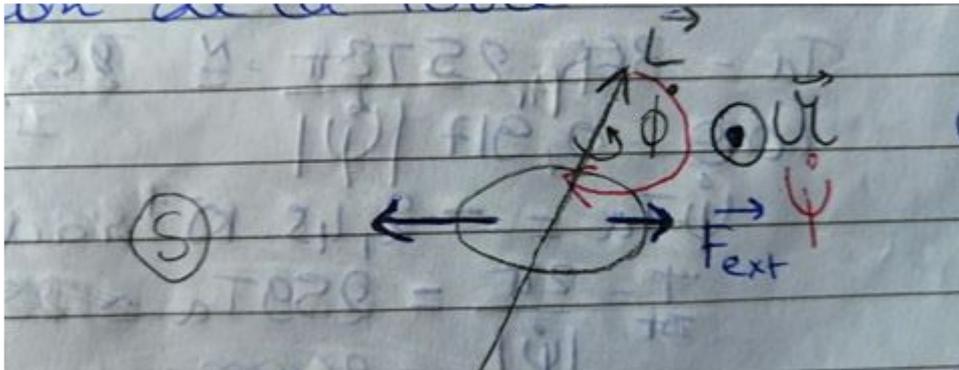
Solstice (durée de jour min ou max)

Equinoxe (durée jour=nuit)

### 2) Précession des équinoxes

On utilisera les solstices ( car plus simple à utiliser).

La précession des équinoxes est dû à la sphéricité imparfaite de la Terre (IMPORTANT : la Terre n'est pas ronde). En effet, les moments des actions gravitationnelles dues aux astres n'est pas nul (Lune, Soleil..). On va alors chercher à déterminer le sens de précession de la Terre.



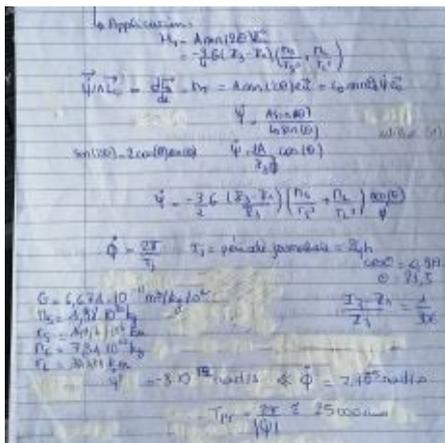
Les forces tendent à aligner le bourrelet de la Terre sur l'ellipse.

Règle du tir bouchon: On a donc  $\mathbf{M}$  vers nous, d'où  $d\mathbf{L}/dt=\mathbf{M}$  donc vers nous, donc  $\mathbf{L}$  (l'axe vient vers nous)

Animation : <https://www.astro-rennes.com/initiation/precession.php>

Ce mouvement de précession est très lent et provoque la variation de la position apparente du Soleil dans le Ciel. La Terre soumise à un couple de force, subit un changement d'orientation. En effet, un tour complet dure 259 siècles soit 26 000 ans.

Application : Cf Diapo



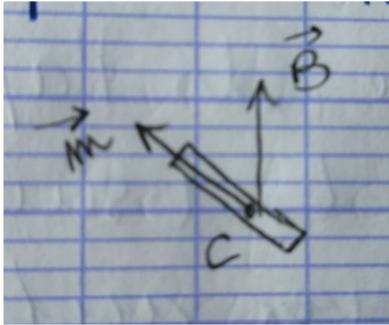
Application macroscopique: équilibrage des avions, roues vélos, équilibrage caméra drone.

### III/ Conséquence dans le domaine microscopique

L'interaction d'un dipôle magnétique rigide et d'un champ magnétique fournit un exemple important au niveau micro de l'approximation gyroscopique.

#### 1) Moment magnétique

On considère un petit barreau magnétique caractérisé par un moment magnétique  $\mathbf{m}$ , traduisant l'interaction du dipôle avec un champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

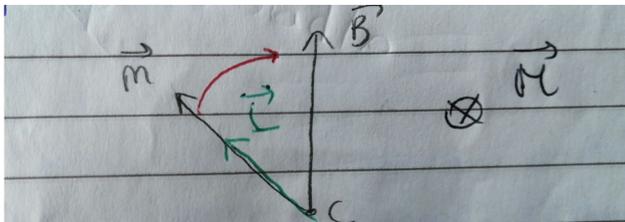


$\mathbf{B}$  exerce en son centre de masse un moment de force  $\mathbf{M}=\mathbf{m}^{\wedge}\mathbf{B}$ , et son moment cinétique est relié à  $\mathbf{m}$  par :  $\mathbf{m}=\gamma_s \cdot \mathbf{L}_c$  avec  $\gamma_s$  le coefficient gyromagnétique.  
(exemple: pour le proton  $\gamma = 2.67 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot T^{-1} \cdot s^{-1}$ )

## 2) Précession du moment magnétique

On peut ainsi appliquer le TMC au centre de masse du dipôle:  $d\mathbf{L}/dt= \mathbf{m}^{\wedge}\mathbf{B}$

On peut ainsi en déduire son mouvement de précession:



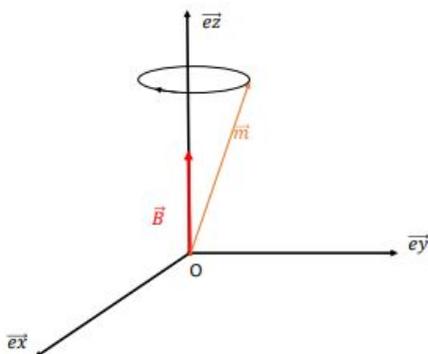
Règle du tir-bouchon : On a  $\mathbf{M}$  “dans le tableau”, donc  $d\mathbf{L}_c/dt$  est aussi “dans le tableau”, donc mouvement de précession vers le tableau.

En effet, on a  $d\mathbf{L}_c/dt = \gamma_s \cdot \mathbf{L}_c \wedge \mathbf{B} = -\gamma_s \cdot \mathbf{B} \wedge \mathbf{L}_c$

Or  $d\mathbf{L}_c/dt = \Omega \wedge \mathbf{L}_c$

Donc  $\Omega = -\gamma_s \cdot \mathbf{B}$  : pulsation de Larmor

Ainsi comme pour la toupie dans l’approximation gyroscopique,  $\|\mathbf{L}_c\|$  est constant et  $L_{cz}$  (suivant  $\mathbf{B}$ ) est constant ainsi  $\mathbf{m}$  précessionne autour de  $\mathbf{B}$  à la vitesse  $\Omega$  : précession de Larmor.



Comme le cas de la toupie, où on a négliger les forces de frottement. Ici dans le cas où il y a des forces antagonistes dues par exemple à l'agitation thermique, l'angle  $\Omega$  diminue et devient nul lorsque  $\mathbf{m}$  est aligné suivant  $\mathbf{B}$  : c'est la relaxation.  
(Application dans le Pérez sur l'atome de Bohr : mais pas trop le temps).

### 3) Résonance magnétique nucléaire

RMN (~1946). On soumet les moments magnétiques nucléaire (dit de spin) à un fort champ  $B$ . (Pour réaliser ses champs on utilise un électro-aimant à supraconducteur que l'on plonge dans He(l).)

Sous ce champ homogène: précession des moments magnétique de spin et ils résonnent tous à la fréquence de Larmor.

On applique dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ , un champ magnétique  $\mathbf{b}$ , plus faible et tournant à la vitesse  $\Omega_{R'/R}$  autour de  $\mathbf{B}$ , de sorte que chaque noyau puisse résonner à une fréquence dépendant de sa position dans l'échantillon.

Dans le référentiel du laboratoire avec le repère (Oxyz) :  $(d\mathbf{L}_c/dt)_R = \mathbf{m} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{b}) = \gamma_S (\mathbf{B} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{L}_c$   
 Dans le référentiel tournant avec le repère (Ox'y'z') :  $(d\mathbf{L}_c/dt)_{R'} = (d\mathbf{L}_c/dt)_R - \Omega_{R'/R} \wedge \mathbf{L}_c$   
 $= \gamma_S (\mathbf{B} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{L}_c - \Omega_{R'/R} \wedge \mathbf{L}_c = \Omega' \wedge \mathbf{L}_c$

$$\Omega' = \Omega + \Omega_b - \Omega_{R'/R} = \Omega_b + \Delta\Omega$$

$$\Omega = -\gamma_S \mathbf{B} \text{ (précession suivant } \mathbf{B}\text{)}$$

$$\Omega_b = -\gamma_S \mathbf{b}$$

Ainsi  $\mathbf{m}$  précessionne autour de l'axe Oz (suivant  $\mathbf{B}$ ) à la vitesse angulaire  $\Omega'$ .

Si  $\Delta\Omega > \Omega_b$  : casi aucun changement

Si  $\Delta\Omega$  tend vers 0 : précession augmente, quand  $\Delta\Omega = 0$  alors  $\mathbf{m}$  autour de  $\mathbf{b}$ .

Il y a résonance si  $\Omega_{R'/R} = \Omega$  ;  $\Omega' = \Omega_b$

A la résonance,  $\mathbf{m}$  précessionne autour de  $\mathbf{b}$  à la vitesse angulaire de  $\Omega_b$  puis finit par s'orienter suivant  $\mathbf{b}$  en raison de sa relaxation (réémission des photons absorbées). On peut ainsi en déduire des informations précieuses sur l'environnement de l'échantillon.

### Conclusion:

On a pu voir et décrire le mouvement d'un solide en rotation en fonction d'un point fixe et ainsi comprendre le mouvement de précession du solide lorsqu'il est soumis à des forces extérieures. De plus, on a pu ainsi l'aborder dans différents domaines et comprendre son utilité au niveau macro et micro.

### Remarques:

-On doit absolument préciser que l'on travaille dans un référentiel galiléen.

-Avant de commencer dire que tous les vecteur sont définis dans R, et ainsi juste précise lorsque ce n'est pas le cas.

-Le moment d'inertie I dépend d'un point, bien le faire en O.

-Très attention sur la formule de Bour!! La formule de Bour permet d'exprimer la dérivée d'un vecteur dans une base mobile. Attention chaque termes de la formule ne signifie rien de concret mais représente juste des termes du à la dérivée, un terme seul n'a pas de signification.

**Questions:**

-Pourquoi et comment expliquer aux élèves que OC (le vecteur entre le point fixe et le centre d'inertie) est colinéaire au moment cinétique ?

-Relation entre moment cinétique et vecteur rotation ?  $L=I.w$

-Que sont les axes principaux d'inertie ? Matrices d'inertie ? Comment calculer un moment d'inertie ?

-Pourquoi le gyroscope a aussi un mouvement de nutation quand on le lance ?

-Pourquoi il tombe au bout d'un moment quand il précesse ?

-Explication du fonctionnement du gyrocompas ? <https://fr.wikipedia.org/wiki/Gyrocompas>