

# LP 49 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

**Niveau :** Licence

**Pré-requis :**

- Résolution d'ED linéaires du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre
- Développement de Taylor autour d'une position d'équilibre stable
- Notions de mécanique du point

**Biblio :**

- BUP n°744
- [https://marchettibenjamin.files.wordpress.com/2019/04/lp\\_oscillateurs\\_portraits\\_de\\_phase\\_et\\_non\\_linearites.pdf](https://marchettibenjamin.files.wordpress.com/2019/04/lp_oscillateurs_portraits_de_phase_et_non_linearites.pdf)
- Physique MPSI PTSI Tout-en-un, Sanz, Cardini, DUNOD, 2013
- <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1911/1911.11594.pdf>
- <https://sites.google.com/site/laurentlepetitdescartes/cours2013> (Mécanique classique, chapitre 4, pour la résolution des ED surtout)

**Introduction :**

De façon générale, un oscillateur est un système dont une grandeur caractéristique croît et décroît périodiquement.

On retrouve les oscillateurs partout dans notre quotidien : le battement du cœur, le déplacement des aiguilles d'une montre... sont des oscillateurs. Pour les étudier, on connaît déjà l'oscillateur harmonique qui est simple et bien connu mais qui ne permet pas en réalité de décrire totalement ce phénomène. On va voir, dans cette leçon comment on peut mener l'étude des oscillateurs à l'aide des portraits de phase. En outre, nous allons voir comment décrire les phénomènes non linéaires, c'est-à-dire, lorsque la réponse n'est pas une fonction linéaire de l'excitation.

---

## I. Système linéaire

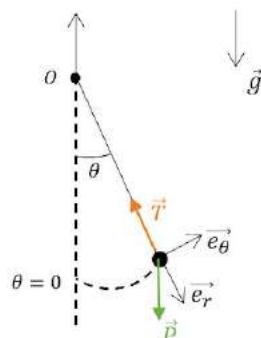
### 1) Oscillateur non amorti

Système = Pendule simple constitué d'un fil de longueur  $l$ , de masse négligeable reliant une masse  $m$ , à un point fixe  $O$ .

On se limite au mouvement dans un plan vertical.

La position est repérée par l'angle  $\theta$  que fait le fil avec la verticale descendante.

Faire schéma au tableau :



Le mouvement est circulaire :  $\rightarrow v = l\dot{\theta} e_{\theta} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

Le point est soumis à la tension du fil de puissance nulle car c'est perpendiculaire au mouvement, donc il n'y a que le poids qui travaille (= force conservative) qui dérive d'une énergie potentielle.

$$E_p = mgz + cst \Rightarrow E_p = -mgl\cos\theta + cst$$

$$\text{Par convention, } E_p(\theta = 0) = 0 \Rightarrow E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$

On considère qu'il n'y a pas de forces de frottement donc  $E_m$  se conserve :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

La conservation de l' $E_m$  nous permet d'écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

→ Cette équation du mouvement est non linéaire du fait du sinus qui dérive de l' $E_p$ .

**Résolution** : On réalise un développement de Taylor autour de la position d'équilibre stable (qui correspond à  $\theta = 0^\circ$ ).

→ Cela correspond à l'approximation des petits angles : on s'arrête au terme d'ordre 2.

$$\text{On a alors : } E_p = mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\text{D'où } E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} \quad (*), \text{ on dérive par rapport au temps}$$

L'ED devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (2)$$

On a une équation différentielle linéaire : Cette EDL est bien connue, c'est celle qui régit tout oscillateur harmonique non amorti.

Les solutions sont purement sinusoïdales de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

La période est ainsi indépendante de l'amplitude des oscillations :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

C'est ce qu'on appelle l'isochronisme des petites oscillations

### Etude du portrait de phase :

Définition d'un portrait de phase :

Ensemble des trajectoires de phases dues aux conditions initiales. C'est la représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps d'un point  $M$  d'abscisse  $\theta$  et d'ordonnée  $\dot{\theta}$ .

Solution générale de notre EDL (2) :

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

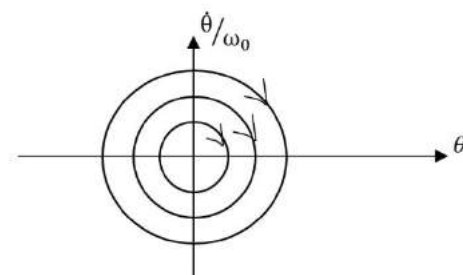
$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

□ On reconnaît l'équation d'une ellipse ( $\frac{\theta^2}{A^2} + \frac{\dot{\theta}^2}{A^2\omega_0^2} = 1$ )

Dans le plan de phase ( $\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ ) on obtient un ensemble de cercles concentriques centrés sur l'origine des coordonnées (car la solution est purement sinusoïdale).

Faire au tableau :

On précise le se



; : Sens horaire.

Les rayons représentent l'amplitude des oscillations.

Caractéristiques des oscillations :

- **Périodiques et sinusoïdales** : Le caractère cyclique (le fait d'avoir une courbe fermée) implique la périodicité. En effet, le fait que le point soit revenu au bout d'une durée  $T$  à sa position initiale assure le caractère périodique de l'évolution (on a un 1<sup>er</sup> cycle suivi d'une infinité de cercles identiques, car les conditions initiales suffisent à déterminer le mouvement).  
Sinusoïdales car on a des cercles.
- Les ellipses (ou cercles) de l'espace des phases sont des **courbes iso-énergétiques**. En effet, en reprenant l'expression de  $E_m$  (\*) :  
$$cste = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow$$
 Equation d'une ellipse, cela traduit la conservation de l'énergie.
- **Linéaire** implique que si  $\theta$  est solution alors  $\alpha\theta$  est aussi solution  $\square$  L'oscillateur ne vibre pas avec une amplitude qui lui est propre. Elle dépend des conditions initiales, on dit que les oscillations sont **homothétiques**.
- **Réversible** :  $t \leftrightarrow -t$ , on a une invariance par renversement de temps.

En réalité, aucun système ne peut être modélisé de cette façon, les oscillations finissent toujours par s'amortir.

## 2) Oscillateur amorti

Pour se rapprocher de la réalité, on introduit une force de frottement. Ici, on suppose qu'on est dans les conditions telles que cette force s'exprime :  $-h\dot{\theta}$  (dépend de la vitesse angulaire), ce qui caractérise les frottements fluides (qui n'est pas une force conservative !)

*Note : En réalité cette approx est fausse, on est jamais dans les bonnes conditions pour avoir des frottements de cette forme, mais on considère cette forme dans un souci de simplicité !!!*

$E_m$  ne se conserve plus.

Maintenant :  $\frac{dE_m}{dt} = P(f_{NC})$

On est toujours dans l'approximation des petits angles, d'où : (\*)  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\theta^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = -h\dot{\theta}^2 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{h}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (3) \quad (\xi = \frac{h}{2ml^2}\sqrt{\frac{l}{g}} > 0, \text{ caractérise l'amortissement})$$

Qu'on peut aussi écrire  $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$  ( $Q = \frac{1}{2\xi}$  le facteur de qualité)

Dans le cas d'amortissement faible, la résolution de cette EDL s'écrit :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\Omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$\rightarrow$  On a une fonction sinusoïdale de pseudo pulsation  $\Omega$ , dont l'amplitude est modulée par une fonction exponentielle de temps caractéristique  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ .

### Etude du portrait de phase :

#### Programme Python : Trajectoire de phase pendule simple amorti

(Attention : Bien vérifier que  $k$  soit positif dans #Définition du facteur devant la dérivée d'ordre 1)

#### Observations :

- Oscillations pseudo périodiques : On a désormais des spirales et plus des courbes fermées. En effet, la fréquence des passages à 0 reste constante mais l'amplitude diminue au cours du temps.
- Enroulement vers l'origine de l'espace : c'est un point d'équilibre qu'on appelle point attracteur (les oscillations amènent le mobile de + en + près de la situation d'équilibre)
- L'ED est toujours linéaire donc les oscillations sont toujours dites homothétiques.
- Irréversible : Le terme en  $\theta^3$  brise l'invariance par renversement du temps.

Parler brièvement du facteur de qualité  $Q$  : Il représente le nombre d'oscillations visibles sur le portrait de phase. Plus  $Q$  est grand, plus le nombre d'oscillations observables est important.

---

#### **Transition :**

*On vient d'étudier le mouvement d'un pendule sans et avec frottements à l'aide d'équations différentielles et de portraits de phase. Cependant, dans cette partie, nous sommes restés dans l'approximation des petits angles, ce qui nous a permis de rester dans le cadre des phénomènes linéaires. On va maintenant étudier le même système mais ce, pour tous les angles.*

---

## **II. Système non linéaire**

### **1) Apparition d'harmoniques**

On reprend l'expression obtenue pour  $E_m$  (1) :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

Pour plus de facilité, on considère qu'on n'a pas de frottements (et donc qu'on a conservation de l'énergie mécanique)

Précédemment, le développement de Taylor nous donnait :  $E_p(\theta) = mgl\frac{\theta^2}{2}$

Mais pour des angles plus grands, cela n'est plus valable !

→ On réalise un développement de Taylor d'ordre 4 autour de  $\theta = 0$ .

$$\text{On obtient : } E_p = mgl\left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\right]$$

La conservation de l' $E_m$  nous donne maintenant (en dérivant par rapport au temps) :

$$0 = ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad (\Delta)$$

Nouvelle ED :

Le terme  $\theta^3$  souligne bien le caractère non linéaire.

On cherche la solution  $\theta(t)$  sous la forme sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . Dans ce cas, on constate que le terme  $\theta^3$  engendre des harmoniques d'ordre 3 puisque  $\sin^3(\omega t) = \frac{3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)}{4}$ .

**Résolution :**

On va chercher une solution du type :  $\theta(t) = \theta_0(\sin(\omega t) + \varepsilon \sin(3\omega t))$

→ Ceci correspond à la méthode perturbative c'est à dire que la solution est la somme d'un terme sinusoïdal et d'un terme correctif pour lequel  $\varepsilon \ll 1$  et  $\theta_0 \ll 1$

Dans  $(\Delta)$  :

$$-\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) - 9\varepsilon \omega^2 \theta_0 \sin(3\omega t) + \omega_0^2 (\theta_0 (\sin(\omega t) + \varepsilon \sin(3\omega t))) - \omega_0^2 \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3(\omega t) = 0$$

En regroupant les termes de même harmonicité et sachant que  $\sin^3(\omega t) = \frac{3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)}{4}$  :

$$\Rightarrow \sin(\omega t) \left( \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} \right) + \sin(3\omega t) \left( \varepsilon (\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{24} \right) = 0$$

Cette équation doit être vérifiée à tout instant, donc les coefficients devant les sinus doivent être nuls.

On s'intéresse seulement au coefficient devant  $\sin(\omega t)$ .

$$\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 - \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right) \quad \theta_0 \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad \text{Formule de Borda}$$

→ Désormais, la période des oscillations dépend de l'amplitude initiale → Perte de l'isochronisme.

Ainsi, la non-linéarité engendre des harmoniques et affecte la période.

L'apparition d'harmoniques accompagne tous les phénomènes périodiques régis par des ED non linéaires.

## 2) Portrait de phase

A partir de (1) :  $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 + 2\omega_0^2 (1 - \cos\theta) = \frac{2E_m}{ml^2}$$

$$\dot{\theta}^2 - 2\omega_0^2 \cos\theta = \frac{2E_m}{ml^2} - 2\omega_0^2$$

$$\text{où } \frac{2E_m}{ml^2} - 2\omega_0^2 = \text{Cste} = C$$

→ On a un réseau de courbes paramétrées par C.

**Diapo p2** : On va faire le lien entre le portrait de phase et le tracé de  $E_p(\theta)$ .

On sait que tout système ne peut accéder à un domaine de l'espace tel que  $E_p \geq E_m$ . Donc le mouvement a lieu ssi :  $E_m \geq E_p \Leftrightarrow E_m \geq mgl(1 - \cos\theta)$ .

On a 4 cas selon  $E_m$  initiale :

(1)  $E_m \ll 2mgl$  : cas des petits angles  $\rightarrow \theta \in [-\theta_m, \theta_m]$

On l'a vu, cela correspond à un oscillateur harmonique : les trajectoires de phase sont des cercles (caractère sinusoïdal des petits angles)

(2) Pour des + fortes amplitudes, on perd le caractère sinusoïdal des oscillations (on n'a plus des cercles)

(3)  $E_m = 2mgl$  : Cas limite correspondant à la séparatrice.

$\rightarrow$  Si le pendule part de  $\theta = 0$  avec  $E_m = 2mgl$ , il atteint la position  $\theta = \pm \pi$  avec une vitesse nulle (point d'équilibre instable)

(4)  $E_m > 2mgl$  : Rien ne limite  $\theta$ .  $\theta'$  ne s'annule jamais et  $\theta$  peut prendre des valeurs quelconques  $\rightarrow$  Mouvement révolutif.

---

## Transition

*On a vu l'effet des non-linéarités : On a l'apparition de nouvelles harmoniques et la variation de fréquence avec l'amplitude.*

*Cependant, tous les oscillateurs ont des sources d'amortissement. Pourtant, dans le cas d'une horloge, par exemple, on a des oscillations évoluant indéfiniment et de façon périodique.*

*Ainsi, on va maintenant voir comment obtenir un oscillateur entretenu. On va, pour cela, utiliser le modèle Van der Pol.*

---

## III. Oscillateurs entretenus

### 1) Equation de Van der Pol

Pour qu'une horloge (par exemple) évolue indéfiniment de façon périodique, elle doit recevoir de l'énergie pour compenser les phénomènes dissipatifs.

**Diapo p3** : On a vu dans le I.2) que

$$\theta'' + 2\xi\omega_0\theta' + \omega_0^2\theta = 0 \quad (3)$$

Où  $\xi > 0$  représente le coefficient d'amortissement.

Mais que se passe-t-il si  $\xi$  est négatif ?

$\rightarrow$  Programme Python : Trajectoire de phase pendule simple amorti

Mettre  $k$  négatif dans #Définition du facteur devant la dérivée d'ordre 1 et relancer le programme.

On peut voir que l'amplitude des oscillations augmente  $\rightarrow$  l'énergie croît.

Evidemment, un tel système n'existe pas dans la nature.

Oscillateur de Van Der Pol :

C'est un modèle mathématique décrivant un oscillateur entretenu. On veut :

- Amorçage des oscillations → le coefficient de la dérivée première doit être négatif.
- Stabilisation en régime permanent = les oscillations doivent être limitées en amplitude → On doit faire en sorte que le coefficient change de signe alternativement pour amplifier puis atténuer les amplitudes.
- Toute à l'heure, concernant le modèle linéaire : l'amplitude des oscillations était déterminée par les CI (homothétie), ici ça ne convient pas → On veut fixer arbitrairement l'amplitude des oscillations car on souhaite un cycle bien défini (Or, pour une EDL, tout cycle  $\alpha C$  est solution)

Solution : Remplacer le coefficient constant devant la dérivée première, par une expression parabolique. Equation de Van Der Pol :

$$\theta'' - \alpha_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right) \theta' + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\alpha_0, \theta_0 > 0$$

Cette équation est non linéaire, on doit l'intégrer numériquement.

#### Discussion de l'équation :

- Quand l'amplitude est faible :  $\theta < \theta_0$  → l'équation se ramène à une EDL, avec coeff devant dérivée 1<sup>ère</sup> qui est  $< 0$  : on a la naissance d'oscillations dont l'amplitude croît exponentiellement.
- Quand l'amplitude est + importante :  $\theta > \theta_0$  → le rapport change de signe, l'amplitude décroît exponentiellement.  
Le système va évoluer entre 2 états infiniment proches. C'est la valeur de  $\theta_0$  qui va déterminer la valeur de l'amplitude des oscillations.  
Le paramètre  $\alpha_0$  va agir sur le caractère + ou – sinusoïdal du système.

#### **Etude du portrait de phase :**

##### Programme Python : VdPEq\_ok

Faire varier  $\theta_0$  et la vitesse initiale (`theta_ini` et `v0` dans #Définition des conditions initiales) pour montrer qu'on a bien un cycle limite indépendant des CI.  
+ Changer  $\alpha_0$  (`alfa0` dans #Définition des paramètres) pour montrer l'influence sur le caractère sinusoïdal.

#### Observations :

- Existence d'un cycle limite : Caractère périodique du régime permanent.
- Le cycle est le même pour toute trajectoire de phase : bien indépendant des CI
- Pas circulaire : hormis pour  $\alpha_0 \ll 1$  → non sinusoïdal (+ on augmente  $\alpha_0$ , moins on a des ellipses)

## 2) Résistance négative

On étudie maintenant la résistance négative avec le montage suivant ( **Diapo p4**) qui permet d'illustrer un oscillateur entretenu.

Fonctionnement de l'ALI :

- En régime linéaire :  $V_e = -R_N i$  (voir **Diapo p5** pour le calcul complet)

Loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} + V_e = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + (r - R_N) i + \frac{q}{C} = 0$$

On dérive par rapport au temps :

$$\Rightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2} + (r - R_N) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

On s'intéresse au terme devant la dérivée 1<sup>ère</sup> :

$(r - R_N) < 0$  si  $R_N > r$  □ **Naissance d'oscillations**

- En régime saturé (quand  $i > |i_s|$ ) :  $V_e = Ri \pm V_{sat}$  (voir **Diapo p5**)

Loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} + V_e = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + (r + R) i + \frac{q}{C} = \pm V_{sat}$$

On dérive par rapport au temps :

$$\Rightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2} + (r + R) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

On s'intéresse au terme devant la dérivée 1<sup>ère</sup> :

$(r + R) > 0$  □ **Amortissement des oscillations**

Dès lors que  $R_N > r \rightarrow$  Les oscillations apparaissent : ainsi, l'amplitude de  $i$  augmente jusqu'au régime saturé de l'ALI. L'amplitude de  $i$  décroît, on repasse en régime linéaire, et ainsi de suite...

On retrouve bien l'équation différentielle de Van Der Pol.

### **Faire manip (voir M28, II.2)**

On montre qu'on retrouve l'équation de Van Der Pol par le calcul :

*Pas forcément le temps de le faire, mais à savoir !*

**Voir Diapos p6-9** (les calculs sont faits sur les diapos, mais je les remets là, au cas où vous en voulez pas sur le diapo) :

La caractéristique (**diapo p6**) montre qu'on peut modéliser  $V_e$  par une équation cubique :

$$V_e = -R_N i + \lambda i^3$$

Pour avoir  $\lambda$  :

$$\frac{dV_e}{di} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{R_N}{3i^2}$$

Les extremas coïncident pour  $i = i_s = \frac{V_{sat}}{(R_N + R)}$  d'où  $\lambda(R_N) = \frac{R_N}{3V_{sat}^3} (R_N + R)^2$

Pour avoir l'ED de  $i(t)$  dans le régime non linéaire, on utilise  $V_e = -R_N i + \lambda i^3$  dans la loi des mailles :

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + \left( \lambda i^3 - R_N i \right) + ri + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2} - \left( R_N - r - 3\lambda i^2 \right) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

D'où :  $L \frac{d^2 i}{dt^2} - \alpha_0 \left( 1 - \left( \frac{i}{i_0} \right)^2 \right) \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$  On retrouve la forme de l'ED de Van Der Pol



$$\text{Avec } \alpha_0 = \frac{R_N - r}{L} \quad , \quad i_0 = \sqrt{\frac{R_N - r}{3\lambda}} \quad \text{et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

---

### **Conclusion :**

On a pu voir dans cette leçon, comment décrire au mieux les oscillateurs linéaires et non linéaires. Nous avons également pu voir l'important intérêt que présente les portraits de phase : en effet, ils permettent de décrire de nombreuses propriétés sur les oscillations sans avoir la solution de l'équation différentielle à tout temps t.

Enfin, on a pu mettre en évidence la richesse des comportements non linéaires notamment avec l'apparition de nouvelles harmoniques. L'étude de la non-linéarité peut également déboucher sur des comportements très complexes, comme par exemple le chaos.

---

### **Questions et remarques :**

-Pour les calculs, on n'est pas obligés de tout écrire (même on peut les mettre sur diapo) si manque de temps.

-Bien connaître le fonctionnement d'un ALI.