

LP 36 : Diffraction de Fraunhofer

Leçon de Laurence Marchand, retranscrite par Paul Remigereau

- Niveau : Licence - Prérequis : Ondes lum, interf, optique géo, TF, diffraction lycée, Huygens Fresnel.

Introduction :

On a étudié l'optique géométrique et l'optique ondulatoire avec les interférences. Nous n'avons pour le moment pas parlé d'un phénomène pourtant vu au lycée : la diffraction. Ce phénomène correspond au comportement (déviation) d'une onde lorsqu'elle rencontre un obstacle de taille proche de sa longueur d'onde. On va s'intéresser à un cas particulier de la diffraction des ondes lumineuses. Manipulation de diffraction par une fente + schéma :

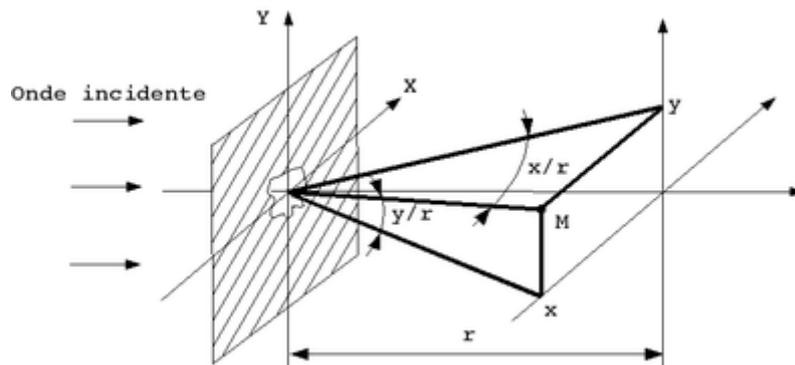


FIGURE 1 – Schema1

On note P un point du plan XY, M un point du plan xy. L'onde incidente est supposée monochromatique de longueur d'onde λn et donc de vecteur d'onde de norme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

1 Diffraction de Fraunhofer

1.1 Principe d'Huygens-Fresnel.

Le principe d'Huygens-Fresnel va nous permettre d'expliquer de décrire le phénomène de diffraction. La contribution de l'onde par la surface infinitésimale autour de P sur le point M de l'écran est, d'après ce principe :

$$d\underline{s}(M) = K d\underline{s}(P) \frac{\exp(ikPM)}{PM} d\Sigma_p \quad (1)$$

K est une constante et Σ_p correspond à la surface infinitésimale autour de P. Pour avoir la totalité des contributions, on somme sur tout le plan XY :

$$\underline{s}(M) = \int_{\Sigma_P} d\underline{s}(P)$$

On calcule la longueur PM, dans l'approximation $r \gg |x-X|$ et $r \gg |y-Y|$:

$$PM^2 = r^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r + \frac{(x-X)^2}{2r} + \frac{(y-Y)^2}{2r}$$

On pose (angles) : $\alpha = \frac{x}{r}$ et $\beta = \frac{y}{r}$. On obtient :

$$PM = r + \frac{r}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha X + \beta Y) + \frac{X^2 + Y^2}{2r} \quad (2)$$

1.2 Diffraction de Fraunhofer

Pour travailler "dans les conditions de Fraunhofer, il faut respecter la condition suivante : $k \frac{X^2 + Y^2}{2r} \ll 1$, ce qui nous donne $PM = r_0 - (\alpha X + \beta Y)$.

On pose désormais $u = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda}$. On obtient alors (en considérant le PM du dénominateur à peu près égal à r) :

$$\underline{s}(M) = \underline{s}(u, v) = K'(u, v) \iint \underline{s}(X, Y) \exp[-2i\pi(uX + vY)] dX dY \quad (3)$$

avec $K'(u, v) = \frac{K \exp(ikr_0)}{r_0}$

Eclairement :

$$E(M) = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = K^2 T^2 \quad (4)$$

Condition d'obtention de Fraunhofer :

$$r \gg \pi \frac{|X^2 + Y^2|}{\lambda} \sim \frac{a^2}{\lambda}$$

Le terme en haut correspond à la taille caractéristique a de l'objet diffractant au carré. Dans le visible, on a $\lambda \sim 500nm$. Si la taille de notre objet est de l'ordre du cm, on doit avoir une distance entre l'objet et beaucoup plus grande que 600 m. Si on a un objet d'une dixième de millimètre, il suffit d'une distance beaucoup plus grande que 60 cm : on associe souvent Fraunhofer à "Diffraction à l'infini" mais cet infini est relatif à la taille de l'objet diffractant...

2 Effet sur la formation des images

2.1 Position du problème

Le but d'un instrument d'optique est d'établir la correspondance ponctuelle entre un objet et son image. Réalisation : introduite un diaphragme : l'image va être modifiée par diffraction.

2.2 Lien avec Fraunhofer

Schéma : Rayon partant d'une source au foyer objet d'une lentille L1. Il ressortent parallèles. Arrivent sur un diaphragme : Diffraction (mais ressortent parallèles dans le schéma. Arrive sur L2, et écran placé au plan focal image de L2 : formation de l'image.

La présence de lentille permet l'observation à l'infini et donc on a bien des conditions de Fraunhofer. On peut faire un schéma du diaphragme avec le $\underline{s}_i(P)$ incident et $\underline{s}_s(P)$ sortant. On définit la transmittance d'une surface :

$$\underline{t}(P) = \frac{\underline{s}_s(P)}{\underline{s}_i(P)} \quad (5)$$

En connaissant la transmittance, on peut déterminer le $\underline{s}_s(P)$ dans l'intégrale de la diffraction de Fraunhofer. Si elle est complexe, le passage par la surface provoque un déphasage. Si elle est nulle, la surface est opaque, si elle est égale à 1 la surface est parfaitement transparente.

On va prendre le cas d'une fente (faire un schéma au tableau) d'épaisseur $a \sim \lambda$ suivant x , et b suivant y , avec $a \ll b$. On parle de fente "infiniment longue".

On fait un schéma vu du dessus. Comme $b \gg a$, on ne considère pas la diffraction suivant b :

Insérer Schéma

On garde la notation $u = \frac{\alpha}{\lambda}$. On a :

$$\underline{s}(M) = K s_0 \int_{-a/2}^{a/2} 1 \times \exp(-2i\pi u X) dX$$

$$\underline{s}(M) = \frac{K s_0 a}{\pi u a} \sin(\pi u a) = K s_0 a \operatorname{sinc}(\pi u a)$$

On en déduit l'intensité :

$$I(u) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi u a) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi a \frac{\theta}{\lambda}\right) \quad (6)$$

Faire une représentation graphique au tableau du sinc.

Demi largeur angulaire : $\Delta u = \frac{1}{a}$ soit $\Delta \theta = \frac{\lambda}{a}$

Discussion des cas limites :

- $a \rightarrow \infty$: pas de fente, $\Delta \theta \rightarrow 0$, propagation en ligne droite.
- $a \rightarrow 0$: $\Delta \theta \rightarrow \infty$, propagation dans toutes les directions.

Dans le cas d'une fente circulaire de diamètre D , la figure de diffraction est une tâche d'Airy (tache brillante auréolée de cercles concentriques de plus faible luminosité) de rayon angulaire $\Delta \theta \sim 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

2.3 Critère de Rayleigh

Le critère de Rayleigh donne la limite de résolution à cause de la diffraction pour un système optique : Cette limite est atteinte lorsque la distance qui sépare le centre de deux taches d'Airy est égale (ou inférieure) au rayon des taches. Concrètement, au passage de système optique, les images des points donnent des taches d'Airy, et si elle se chevauche "plus que de moitié" on considère qu'on ne peut pas distinguer les deux. (Faire un petit graphe pour montrer ça).

3 Transformée de Fourier

3.1 Transformée de Fourier et Fraunhofer

Si on reprend notre expression de la diffraction par Fraunhofer :

$$\underline{s}(u, v) = K s_0 \iint_{\sigma} \underline{t}(X, Y) e^{-2i\pi u X} e^{-2i\pi v Y} dX dY = TF(\underline{t}(X, Y)) \quad (7)$$

On reconnaît donc une transformée de Fourier de la transmittance, et c'est pourquoi on qualifie u et v de fréquence spatiale !

3.2 Exemple du réseau, fréquence spatiale

Pour un réseau où l'on considère des fentes de largeurs b avec un pas de a . Sa transmission peut s'écrire : $t(X) = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{2\pi X}{a})$. On calcule la transformée de Fourier en décomposant notre cosinus en exponentielle. On trouve :

$$\underline{s} = \frac{1}{4}(2sinc(\pi u b) + sinc(\pi(u + \frac{1}{a})b) + sinc(\pi(u - \frac{1}{a})b))$$

Représentation fréquentielle : Faire 3 sinus cardinaux, un centré sur $1/a$, un autre sur $-1/a$ et un sur 0 .

4 Figure de diffraction du réseau

Faire un schéma : Rayon arrivant tous parallèles sur un réseau, sortent diffractés avec un angle θ , passage par une lentille (infini), écran placé au plan focal image de la lentille.

On a la position du premier pic lumineux déviés qui est à $x_1 = f'\theta$ par construction géométrique, et le θ est donné par l'expression de la partit précédente (un u tel que l'un des sinus cardinaux soit maximal, soit $u = 0$, $u = 1/a$ ou $u = -1/a$) ce qui nous donne $x_1 = f' \frac{\lambda}{a}$.