LP 29 : OEM dans les milieux conducteurs

Leçon de Matthéo Clerget, retranscrite par Paul Remigereau

- Niveau : Licence - Prérequis : Conductivité statique, OEM vide, OEM dispersif, plasma.

Introduction :

On a déjà vu (LP 28) la propagation des OEM dans les diéléctriques, on regarde maintenant ce qui se passe dans les conducteurs. Important car utile dans la vie de tous les jours (guide d'onde,micro onde...) et concerne de nombreux matériaux (ex : métaux).

1 Modélisation d'un conducteur

1.1 Modèle de Drude

Rappel pour un champ statique Drude propose, en se basant sur une théorie cinétique des gaz, que l'on considère les électrons libres mais subissant une force qui s'oppose à leur mouvement, de la forme : $\overrightarrow{F} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$. τ correspond ici au temps caractéristiques lié aux collisions des électrons. On a (Loi d'Ohm locale) : $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{E} = \gamma_0\overrightarrow{v}$ où γ_0 est la conductivité du milieu. En appliquant le PFD, on aboutissait à ;

$$\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{1}$$

Pour les métaux, $\gamma_0 \simeq 10^7 S/m$, ce qui donne $\tau \simeq 10^{-14}s$

On s'intéresse maintenant à ce qui se passe dans le cas d'un champ variable, de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{j\omega t}$. Les champs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même forme. On fait un PFD :

$$m\frac{d\underline{\overrightarrow{v}}}{dt} = -\frac{m}{\tau}\underline{\overrightarrow{v}} - e(\underline{\overrightarrow{E}} + \underline{\overrightarrow{v}} \wedge \underline{\overrightarrow{B}})$$

On peut montrer que la force en B est négligeable devant la force en E dans l'approximation non relativiste. On a alors

$$(mi\omega + \frac{m}{\tau})\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}} \longrightarrow \underline{\overrightarrow{v}} = -\frac{e\tau}{m(1+i\omega\tau)}\underline{\overrightarrow{E}}$$

En utilisant la loi d'Ohm locale, on obtient une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \tag{2}$$

1.2 Electroneutralité

Initialement, ρ(t=0) = 0 en tout point. Ensuite, le champ E créé un déséquilibre, on a $\rho(t = 0^+) = \rho_0$. On a néamoins l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\overrightarrow{j}) = 0 \tag{3}$$

En utilisant la loi d'Ohm, Maxwell Gauss et la conductivité trouvée précédemment, on obtient :

$$(\frac{\gamma_0}{\epsilon_0} + i\omega + (i\omega)^2\tau)\underline{\rho} = 0$$

On peut réécrire l'équation précédente en réel :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0 \tau}\rho = 0$$

On reconnait une équation différentielle d'ordre 2 assez classique, on pose $\omega_p = \sqrt{\frac{\gamma_0}{m\epsilon_0}}$ et Q = $\omega_p \tau$

On retombe sur une équation d'oscillateur amorti classique :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p}{Q}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \tag{4}$$

Quelques valeurs sont mises sur diapo pour le cuivre et l'aluminium. $\omega_p \sim 10^{16}$, Q$\sim$ 100 > 1/2.

On trace l'évolution temporelle de ρ (oscillations qui s'atténuent assez vite au bout de quelques τ car $\omega_p << \frac{1}{\tau} = \omega_{em}$).

1.3 Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

On a déjà vu l'ARQS, qui peut permettre de simplifier l'équation de Maxwell Ampère de la sorte :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0(\overrightarrow{j} + \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}) = \mu_0 \overrightarrow{j} \tag{5}$$

Pour cela, il faut que les courant de conduction $\overrightarrow{j}$ soit grand devant les courants de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$. Cela signifie qu'il faut, dans le cas limite :

$$\frac{\gamma_0}{(1 + i\omega_p\tau)} \sim \epsilon_0\omega_p \tag{6}$$

- Si on suppose $\omega_p\tau << 1$ alors $\omega_p << \frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$. ARQS approximé : $\frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \sim \omega_p$ soit $10^{18} << \omega_p$ ce qui est donc incohérent.

- Si on suppose $\omega_p\tau >> 1$ alors $\omega_p >> \frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$. ARQS approximé : $\frac{\gamma_0}{\omega_p\tau} \sim \epsilon_0\omega_p$ soit $\omega_p \sim \sqrt{\frac{\gamma_0}{\epsilon_0\tau}} \sim 10^{16}$. Cohérent.

Conclusion : On à l'ARQS pour $\omega << \omega_p$.

2 Etude à basse fréquence : effet de peau

Dans cette section, $\omega << \omega_{em}$ et ω_p. Au niveau énérgétique, effet Joule :

$$< \frac{d\mathcal{P}}{dt} >=< \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} >= \gamma_0 < |E|^2 > \tag{7}$$

2.1 Equation de diffusion : Atténutation

On fait le classique rot(rot()), on obtient :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = \gamma_0\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{8}$$

Il s'agit d'une équation de diffusion et non de d'Alembert. Supposons (schéma) une OPPM se propageant dans le vide dans le sens des z croissants, et qui rencontre le milieu conducteur en z = 0. On lui donne la forme suivante :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(z,t) = \underline{E_0}e^{i\omega t - kz}.\overrightarrow{e_x}$$

En injectant dans l'équation (8), on trouve la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = \gamma_0\mu_0 i\omega \rightarrow \underline{k} = \frac{(1+i)}{\delta} \tag{9}$$

en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma_0\mu_0\omega}}$, que l'on nomme épaisseur de peau. On réécrit le champ $\overrightarrow{\underline{E}}$, et on interprète avec un schéma de l'amplitude en fonction de z :

$$\overrightarrow{\underline{E}} = \underline{E_0}e^{-\frac{z}{\delta}}e^{i\omega t - \frac{z}{\delta}}.\overrightarrow{e_x}$$

Onde plane progressive mais amortie, on a un champ E confiné sur une épaisseur δ. Valeurs pour le cuivre par exemple :

-20 kHz, δ=1mm, cables coaxiaux

-1 Mhz, δ=15 μm

On peut donner une interprétation inductive à cet effet de peau, le métal s'oppose à la variation d'un champ en son sein.

2.2 Limite du conducteur parfait

Pour un conducteur parfait, $\gamma_0 \rightarrow \infty$, donc $\delta \rightarrow 0$, et donc les courants sont uniquement en surface.

3 Etude à haute fréquence - plasma

Dans cette partie, $\omega >> \frac{1}{\tau} \sim 10^{14}s$, on a donc $\underline{\gamma} = -i\frac{\gamma_0}{\omega\tau}$
Conséquences : $\overrightarrow{\underline{j}}$ et $\overrightarrow{\underline{j}}$ sont en quadrature de phase, l'énérgie dissipé par est donc nulle.

3.1 Rappel de la relation de dispersion

Rappel : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c}$, ce qui nous laisse 2 régimes :

-$\omega > \omega_p$, donc k=$\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$, transparent, dispersif.

–$\omega < \omega_p$, donc k=-i$\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$. Dans ce cas :

$$\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}}cos(\omega t - \phi) \tag{10}$$

On a une onde stationnaire évanescente.

3.2 Transparence/évanescence

Voir ci dessus

3.3 Différence avec plasma simple

Pour un plasma peu dense, on a classiquement n$\sim 10^7$, beaucoup plus faible que les métaux. On sait que le domaine de fréquence des ondes lumineuses est vers 10^{15} Hertz. C'est pour cela que les métaux réfléchissent la lumière (miroir) et pas les plasmas simples.

Utilisation d'un programme python Propagation dans le cuivre dispo sur le site Agreg.

Questions/réponses

- Comment on conduit le courant pour le hautes fréquences, vu que l'effet de peau est génant ? Et bien plutôt que de prendre un "gros cable", on prend plein de petits cables fin : comme ca pas de problème de pénétration dans le milieu, on a quasiment que de la surface.

- Couleur rouge/orangée du cuivre ? structure électronique : le cuivre constitue une exception à la loi de Madelung, n'ayant qu'un électron dans la sous-couche 4s au lieu de deux. L'énergie d'un photon de lumière bleue ou violette est suffisante pour qu'un électron de la couche d l'absorbe et effectue une transition vers la couche s qui n'est qu'à-demi occupée. Ainsi, la lumière réfléchie par le cuivre ne comporte pas certaines longueurs d'onde bleues / violettes et apparaît rouge.

-Déphasage de pi qui apparait à la réflexion sur un metal.

- ODG du coefficient de réfléxion en énergie pour un miroir dans le visible ? environ 97%.

- Pourquoi on néglige les intéractions éléctrons/éléctrons dans le modèle de Drude ? Je dirais que c'est car basé sur la théorie cinétique des GP, qui n'intéragissent pas entre eux.