LP 26: Propagation avec dispersion

Remarque jury:
-Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
-La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes.
-Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sûr s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.
-Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.
-Un battement n'est pas un paquet d'ondes. Le choix d'une représentation de
Fourier spatiale ou temporelle pour représenter un paquet d'ondes dépend de la nature du problème de propagation étudié. Le concept de vitesse de groupe n'a de sens que si le phénomène de propagation étudié est associé à une relation de dispersion. La vitesse de groupe n'est pas toujours la vitesse de propagation de l'énergie.

Bibliographie:

- PC/PC* Dunod p 1013 à 1043
- https://www.f-legrand.fr/scidoc/srcdoc/sciphys/elecmag/dispersif/dispersif-pdf.pdf
- (http://lnspe2.fr/Cours_Phys/Ondes04.pdf)
- http://s15847115.domainepardefaut.fr/pc/paquetOndes.html

Niveau : Licence

PR :

- Equation de Maxwell
- Equation de d'alembert
- propagation onde électromagnétique dans le vide
- Ondes planes

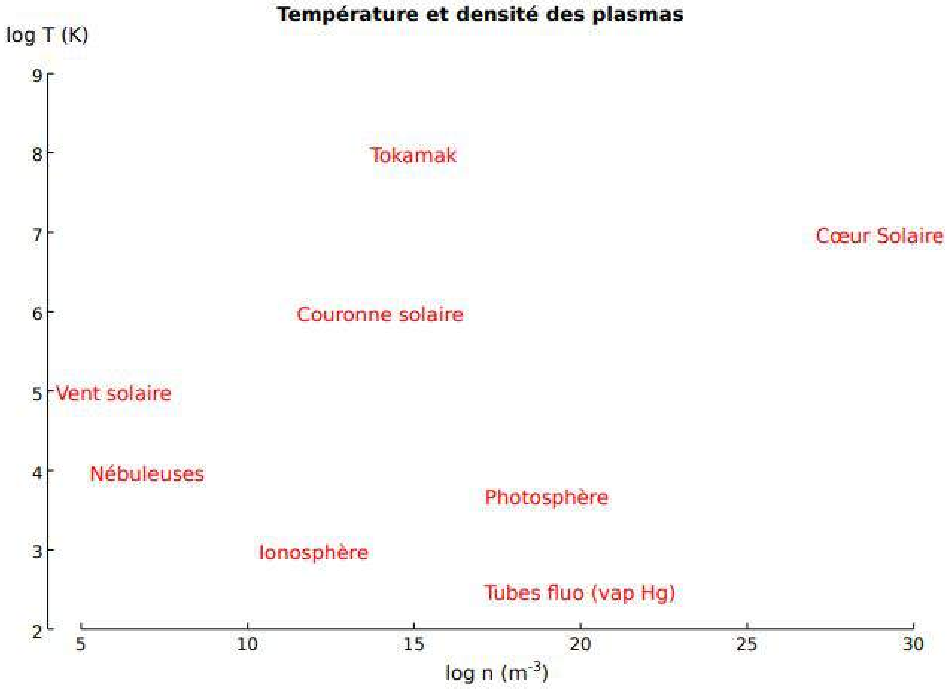
Intro:
Jusqu'à présent , les phénomènes de propagation étudiés satisfaisaient à l'équation d d'Alembert. Dans ce cas, Le signal se propage à une vitesse c indépendante de la fréquence.
Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à un milieu plasma, la ionosphère, et voir les conséquence lorsque la vitesse d'une onde dépendante de la fréquence.
But : exhiber un milieu dispersif et le mettre en équation ; se donner des outils pour étudier la propagation.

I/ Propagation dans un plasma

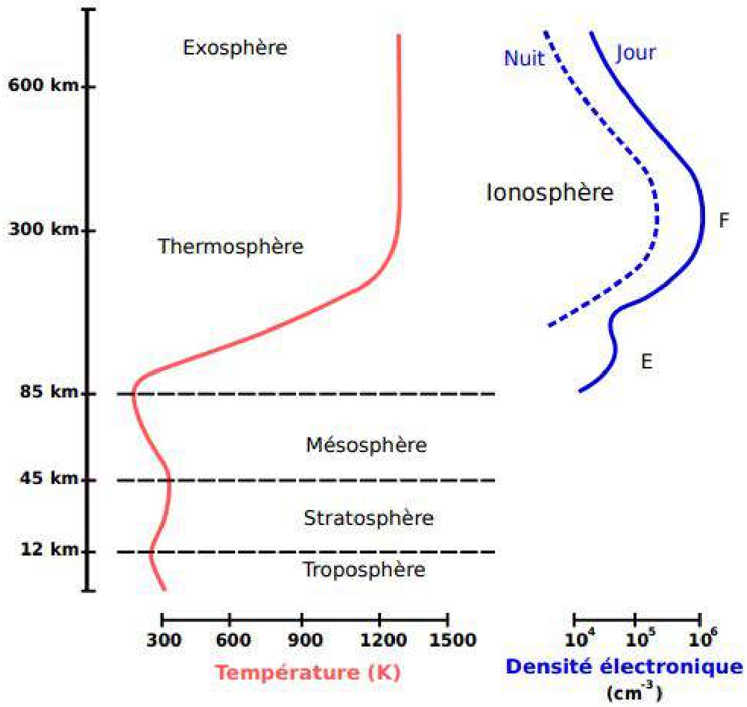
1) Ionosphère: position du problème

Un plasma est essentiellement un gaz ionisé. Un plasma est produit lorsqu'un gaz est chauffé jusqu'à ce que les collisions entre les particules soit suffisamment violentes pour arracher les électrons aux atomes ou molécules.

Différents exemple de plasma caractérisés par leur température et leur densité électronique:



Nous allons nous intéresser particulièrement au plasma de l'ionosphère, qui est relativement froid et de très faible densité. Les ions sont produits par des réactions photochimiques sous l'effet du rayonnement solaire UV, très intense à haute altitude. La température dans l'ionosphère est beaucoup plus élevée qu'à la surface terrestre, de l'ordre de 1000 K. L'absorption du rayonnement UV est en grande partie responsable de cette température.



L'ionosphère, couche de l'atmosphère comprise entre 100 et 600 km d'altitude. La densité électronique est d'environ n = 10^{12} m^{-3} et la température T = 1200 K.

L'objet de cette partie est de décrire la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma. Il y a plusieurs modes qui peuvent se propager dans les plasmas: Mode transverse électromagnétique, longitudinaux électrostatique, acoustiques électrique ou ionique, magnétohydrodynamique...Dans cette partie nous étudierons uniquement la propagation d'ondes électromagnétiques transverses.

Dans cette étude on se placera dans les cas :(PC/PC* page 1016)
-On néglige le mouvement des ions par rapport à celui des électrons (car $\mathbf{m_i >> m_e}$)
-on travaille en mécanique non relativiste(car la vitesse quadratique moyenne des électrons dû à la température <<c)
-il n'y a pas d'effet quantique la longueur d'onde de De Broglie des électrons <<à la distance entre les particules $\mathbf{\lambda_{DB}=3.10^{-10}m}$)
-le plasma est dilué "non collisionnel" (la longueur de Landau quand Ep=Ec, est plus petite que la distance entre les particules $\mathbf{rl<<n^{-1/3}}$)
-Le plasma est localement neutre(si on l'observe à des longueurs supérieur à 3 longueurs de Debye $\mathbf{\lambda_D=1.5mm;}$ les concentrations en électrons et en ions sont égales $\mathbf{n_i=n_e}$)

Si on néglige le poids, la force qui s'applique sur un électron est seulement celle dû au passage de l'onde électromagnétique dans le plasma.

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

En se référant aux ondes électromagnétiques dans le vide, on peut supposer que B sera de l'ordre de grandeur de E/c. Comme on est dans un cas non relativiste vB<<E, donc on peut négliger la force du au champ B par rapport au champ E.

PFD:

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\overrightarrow{E}$$

Nous allons nous intéresser aux ondes électromagnétiques monochromatiques:

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{i(\underline{\overrightarrow{k}} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t)}$$

On recherche donc une solution permanente de cette équation en régime sinusoïdal. En notation complexe :

$$\mathbf{v=v_0e^{i(k.r-\omega t)}}$$

$$-i\omega m\underline{\overrightarrow{v}} = q\underline{\overrightarrow{E}}$$

En distinguant les ions (mi > 10^{-27} kg) et les électrons (me = $9,1.10^{-31}$ kg), on obtient la densité de courant dans le plasma, en régime sinusoïdal permanent :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = i\left(\frac{n_e q_e^2}{\omega m_e} + \frac{n_i q_i^2}{\omega m_i}\right)\underline{\overrightarrow{E}}$$

On a vu que dans le plasma **n_i=n_e**, mais **m_i>m_e**
On se retrouve donc avec une équation:

$$\underline{\vec{j}} = i\frac{ne^2}{\omega m_e}\underline{\vec{E}}$$

La densité de courant complexe de ce modèle de plasma est donc proportionnelle au champ électrique. Cette relation ressemble à la loi d'Ohm locale, mais il faut remarquer que la conductivité est imaginaire pur. Cela signifie que la densité de courant oscille en quadrature par rapport au champ électrique. Considérons alors la puissance moyenne reçue par les charges :

$$<\vec{j}\cdot\vec{E}>=\frac{1}{T}\int_0^T j_0 E_0\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt = 0$$

Dans un plasma de très faible densité, la puissance moyenne reçue par les charges est nulle. Il n'y a pas d'énergie dissipée.

2) Equation de propagation

Les équations de Maxwell pour un milieu dont la densité de charge est nulle conduisent à l'équation de propagation suivante :

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

En remplaçant **j** par sa valeur

$$\nabla^2\underline{\vec{E}} = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

3) Relation de dispersion

On recherche une solution de l'équation de propagation sous la forme suivante :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\underline{\vec{k}}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Le vecteur d'onde sera éventuellement un vecteur complexe. Il s'agit d'une onde plane monochromatique mais si le vecteur d'onde est complexe elle n'est pas progressive.
L'équation de propagation nous donne:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e c^2}$$:

On définit alors une pulsation caractéristique du plasma, appelée pulsation de coupure ω_c ou **pulsation plasma** (généralement noté ω_p):

$$\omega_c = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

La relation de dispersion s'écrit finalement :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

Pour la ionosphère ω_c=ω_p=6.10^{7}rad.s^{-1} ou f$_p$=9MHz.

<u>Transition:</u> Une onde monochromatique n'est pas physique car comme sa fréquence est très bien défini, donc son extension spatial est infini. Une vision plus physique des ondes est le paquet d'onde.

II/ Paquet D'onde PC/PC*p 1032

1) Définition du paquet d'onde

Un paquet d'onde peut être modélisé comme une somme d'OPPM autour d'une certaine pulsation que l'on va appeler ω_0.

Prenons un signal constitué de plusieur OPPM de pulsation entre ω_0-dω/2 et ω_0+dω/2.
En x=0:

$$s(0,t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

A une distance x le paquet d'onde c'est propagé.

$$s(x,t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{i(\omega t - kx)}\, d\omega$$

On peut développer le vecteur d'onde à l'ordre 1:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\underbrace{\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0}}_{\frac{1}{v_g}}$$

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$$

On peut réécrire ω comment au dessus.

En remplaçant dans la formule du signal:

$$s(x,t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{i\left((\omega_0+(\omega-\omega_0)t - \left(k_0 + \frac{(\omega-\omega_0)}{v_g}\right)x\right)}$$

$$s(x,t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{i\left[(\omega-\omega_0)\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]}$$

$$s(x,t) = \cos\left(\frac{1}{k_0}(v_\varphi t - x)\right) \times s\,(v_g t - x)$$

On voit que l'on se retrouve avec un produit d'onde progressive, une qui se déplace à la vitesse $v\varphi$, et une autre à la vitesse vg. Le premier cosinus est appelé <u>la porteuse</u>, et s(vgt-x) <u>l'enveloppe</u>.

2) Vitesse de phase/vitesse de groupe

Dans l'expression précédente on identifie la vitesse de phase:

$$v = \frac{o}{ko}$$

Et la vitesse de groupe

$$vg = \frac{d}{dk}$$

Animation vitesse phase/groupe.
http://s15847115.domainepardefaut.fr/pc/paquetOndes.html

3) Déformation du paquet d'onde

Lorsqu'on fait un développement à l'ordre deux on voit apparaître une autre contribution dans l'enveloppe.

$$k(\omega) = k_0 + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} + (\omega-\omega_0)^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}$$

$$s\left(t - \frac{x}{v_g}\right) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)\, \exp\left[i(\omega-\omega_0)\left(t - \alpha(\omega)x\right)\right] d\omega$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{v_g} + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}$$

On remarque que si la dérivée seconde de k par rapport à ω n'est pas nul il y a étalement du paquet d'onde.

-Vg=cst différente de $V\varphi$ → Dispersion sans étalement du paquet d'onde

-Vg(ω) → dispersion avec étalement du paquet d'onde

Programme Python agreg ONDE étalement du paquet d'onde

III/ Retour sur l'ionosphère PC/PC* p 1036

1) $\omega > \omega_p$

Dans la leçon écrire ω_p à la place de ω_c.

On rappelle la relation de dispersion

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$$

La vitesse de phase est :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de phase représente la vitesse à laquelle se déplace une onde monochromatique de pulsation ω.
On voit que la vitesse de phase dépend de la pulsation : le plasma est un milieu dispersif. Elle est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Lorsque la pulsation est très grande devant ω_c, la vitesse de phase est pratiquement égale à celle du vide et la dispersion devient négligeable.

Comme nous l'avons vu plus haut, les paquets d'onde se propagent à la vitesse de groupe. D'une manière générale, une modulation de l'amplitude se propage à la vitesse de groupe.

On obtient ainsi la vitesse de groupe :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{V_\phi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie ou de l'information.

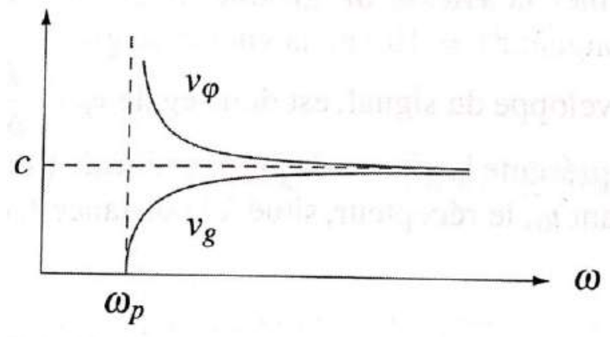


image PC/PC p1036*

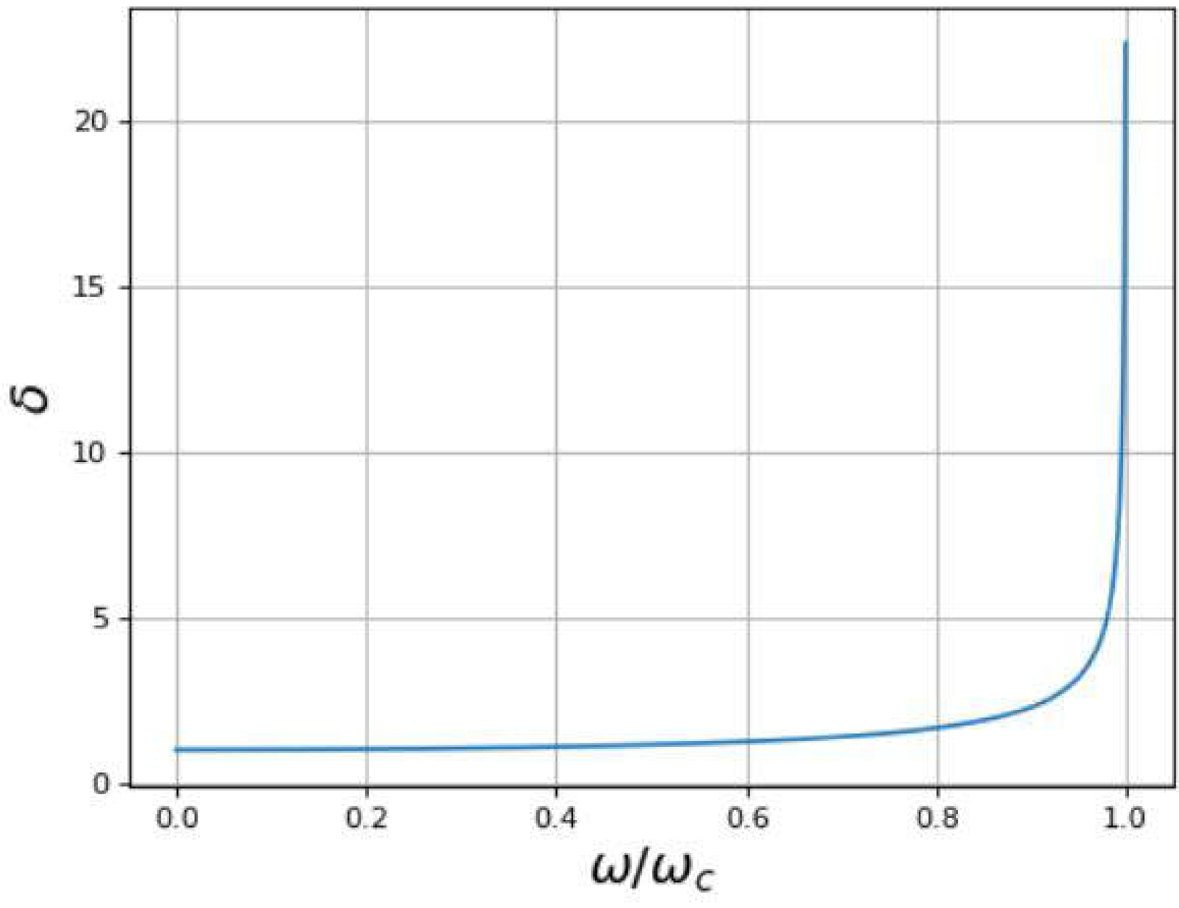
Lorsqu'on s'approche de la fréquence de coupure, la vitesse de groupe tend vers zéro. Les ondes utilisées pour communiquer avec les satellites doivent avoir une fréquence nettement supérieure à la fréquence de coupure de l'ionosphère. Les fréquences utilisées pour cela sont dans le domaine du gigahertz. Pour de telles fréquences, le plasma ionosphérique est pratiquement équivalent au vide.

2) ω<ω_p

L'équation de dispersion conduit alors à un nombre d'onde imaginaire pur :

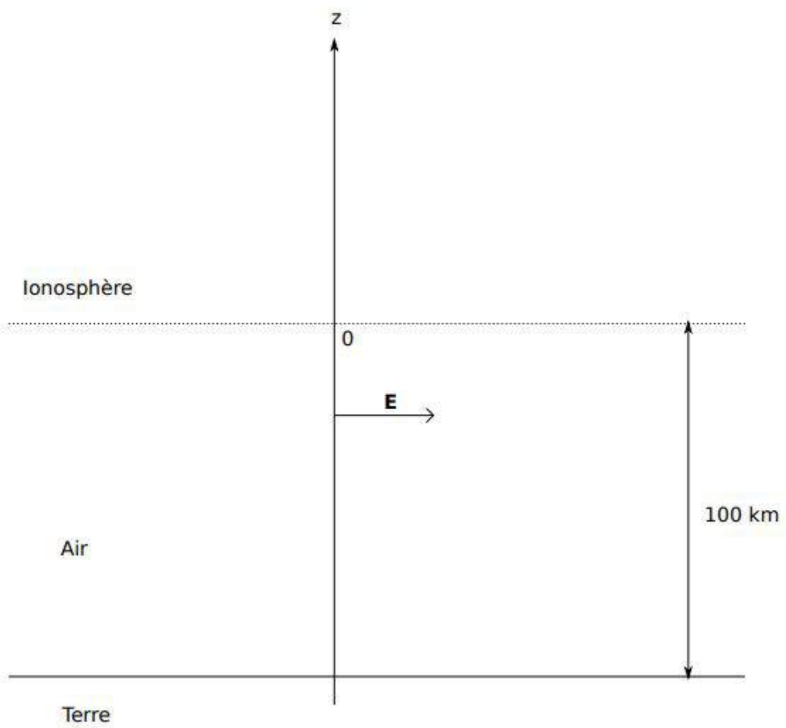
$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c} = \pm i \frac{1}{\delta}$$

On appelle δ l'épaisseur de peau.



On voit que tant que ω<ω_p la distance caractéristique reste inférieur à 5m. ce qui est très petit par rapport à la largeur de la ionosphère.

Considérons une onde plane progressive monochromatique se propageant dans l'air (assimilée au vide) et rencontrant le plasma ionosphérique en incidence normale. On suppose que la polarisation est rectiligne.

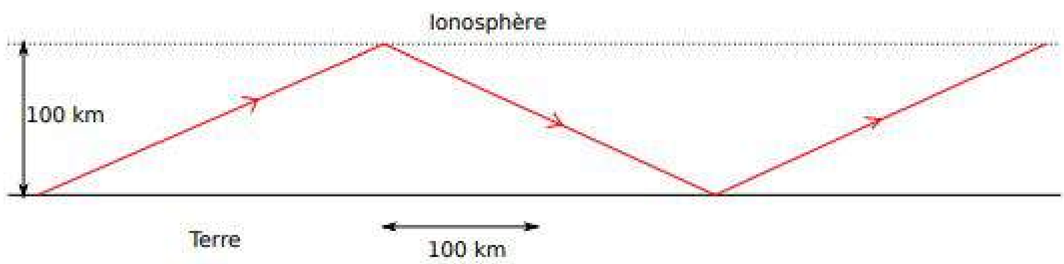


Si on réécrit notre vecteur champ électrique avec le k imaginaire:

$$E_x(z,t) = E_1 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t)$$

Cette onde n'est pas progressive, puisque l'amplitude du cosinus s'atténue rapidement avec z. **Il s'agit d'une onde évanescente**. On peut montrer que cette onde ne transporte aucune puissance (en moyenne). Comme nous l'avons démontré plus haut, aucune énergie n'est dissipée dans ce plasma de très faible densité. En conséquence, la puissance de l'onde incidente n'est pas absorbée dans le plasma mais réfléchie sous forme d'une onde réfléchie se propageant dans le sens de z décroissant, de même amplitude E0.

Les ondes de fréquence inférieure à environ 9 MHz ne peuvent donc traverser l'ionosphère. Elles sont réfléchies vers le sol. Cette propriété est mise à profit pour la communication à longue distance par onde radio.



Les transmissions radiophoniques ondes longues utilisent des fréquences de l'ordre de 100 kHz, qui sont réfléchies par l'ionosphère et par le sol. Les transmissions radio HF de l'ordre du mégahertz utilisent aussi la réflexion par l'ionosphère. Pour les communications par satellites, il faut bien sûr utiliser une fréquence largement supérieure à la fréquence de coupure (de l'ordre du gigahertz).

Conclusion:

En conclusion, le plasma se comporte comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure ωp. Les ondes de pulsation inférieure à la pulsation de coupure sont entièrement réfléchies par le plasma, et ne peuvent donc le traverser.

Le coefficient de réflexion en puissance est égal à 1 en dessous de la pulsation de coupure. La simulation ONDE étalement du paquet d'onde dans un plasma montre comment les paquets sont transmis dans le plasma pour $\omega > \omega c$. On remarque la dispersion importante, avec une vitesse de groupe faible, lorsque les raies du paquet sont juste au dessus de la fréquence de coupure.

Question:

Quand on envoie à l'aide d'un GBF via un haut parleur un signal d'une fréquence que mesure-t-on, la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ? On mesure la vitesse de groupe car c'est ce qui représente la vitesse de déplacement de l'information.

Comment mesurer expérimentalement la vitesse de phase et la vitesse de groupe ?

Réponse léo, pas vérifiée:

Pour la vitesse de phase il faut envoyer une onde monochromatique dans le câble coax.

Pour la vitesse de groupe envoyer un signal carré comme en TP. (avec un duty).

Réponse Maelys:

Selon moi la vitesse que tu récupères à la sortie du cable coax, c'est une vitesse de groupe, mais en envoyant une onde monochromatique tu peux récupère l'information à l'intérieur de l'enveloppe et remonter à la vitesse de phase. Pas sur qu'il soit nécessaire de changer de signal!

Vous avez dit que la vitesse de l'énergie, c'est la vitesse de groupe, pouvez-vous expliquer comment on le démontre ?

La vitesse de phase est supérieur à la vitesse de la lumière. Donc c'est la vitesse de groupe qui représente le transport d'énergie.

La vitesse de groupe correspond à la vitesse à laquelle l'énergie est transportée par le signal, mais ce n'est pas toujours le cas, en particulier dans des matériaux dispersifs aux propriétés particulières. Certains matériaux ont ainsi permis d'observer la propagation d'impulsions laser avec des vitesses de groupe supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide sans que l'énergie transportée ne se déplace plus vite que celle-ci et donc sans que le principe de relativité soit violé.

L'eau est-il un milieu dispersif pour les ondes ?

Relation de dispersion(wikipédia):

$$\omega^2 = g\,k\,\tanh(k\,h),$$

L'air comme l'eau est un milieu dispersif. Un observateur sur un bateau verra un mouvement complexe de la surface de l'eau. Ce mouvement de la surface sera différent si cet observateur regarde au loin : l'onde résultante se déforme au cours de la propagation. Les basses fréquence voyage plus vite que les hautes fréquences.

Un observateur sur la plage observe les grandes longueurs d'onde arriver en premier(car basses fréquences), puis ensuite les petites longueur d'onde.

L'air est-il un milieu dispersif pour les ondes sonore?
La vitesse du son ou célérité du son dépend de la nature, de la température et de la pression du milieu. **Il n'y a pas de dispersion**. La plupart du temps, l'atténuation par absorption dans le milieu de propagation varie selon la fréquence. Dans l'air, en 500 m, l'amplitude d'une onde à 8 000 Hz est dix fois plus affaiblie qu'une onde à basse fréquence. On n'en connaît que certaines causes. La viscosité de l'air provoque une atténuation proportionnelle au carré de la fréquence.

Est-ce un problème que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière ?
Non la vitesse de phase n'a pas de sens physique.

Air vraiment pas dispersif pour les ondes électromagnétiques ?
Non, il y a par contre des phénomènes d'absorptions dû aux molécules qui composent l'air.