LP 24 : Ondes progressives, Ondes stationnaires

Leçon de Paul Remigereau

- Niveau : Licence - Prérequis : Ondes (lycée), Mathématiques (Equations différentielles, développement limités), Mécanique (Lois de Newton, tension d'une corde), Electrocinétique

Introduction :

On a vu au lycée que les ondes correspondent à un phénomène physique de propagation de l'information. Nous avons vu qu'elles sont sujettes à de nombreux phénomènes qui leurs sont propres : diffraction, interférences... Le but de cette leçon est de développer un formalisme mathématique qui rend compte de propagation des ondes. On va commencer par le phénomène d'onde sur une corde, dont on peut voir une réprésentation ici : https://www.youtube.com/watch?v=ttgLyWFINJI.

1 Propagation d'ondes et équation de d'Alembert

1.1 Cas de la corde vibrante

1.1.1 Grandeurs utiles pour la corde (Mise en pré-requis pour gagnes du temps)

Considérons une corde de longueur L, homogène, sans raideur (qui n'opposep pas de résistance à la déformation), de masse m donc de masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$.

Si la corde est de longueur AB, toute section MB de cette corde exerce une force $\vec{T}$ sur la section AM. Cette force est tangente au fil en M pour un fil sans raideur, on va donc l'écrire :

$$\vec{T}(M) = T(M).\overrightarrow{\tau(M)}$$

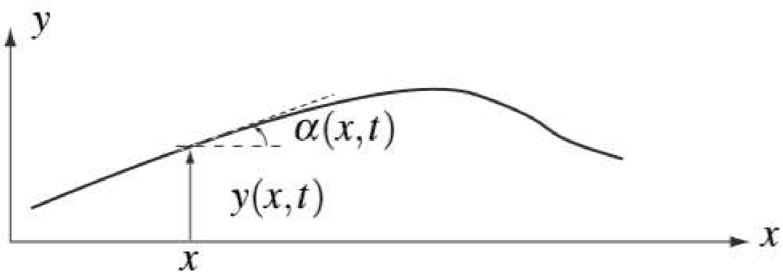
où $\overrightarrow{\tau(M)}$ est le vecteur unitaire tangent à la corde, dirigé vers la section qui exerce la force.

Remarque : Le théoreme des actions réciproque nous indique que la portion BM subit la force $-\vec{T}$ en M.

1.1.2 Modèle et hypothèses

On va supposer la corde tendue avec un tension T_0, à l'horizontale. On va négliger l'effet du poids pour simplifier les calculs. Cette approximation n'est pas aberrante : Prenons une corde de guitare, tendue à 100 N (valeur typique pour une guitare classique), de longueur 63 cm, en acier. Sa masse est de l'ordre du gramme, donc son poids de l'ordre de 0,01 N : il est bien négligeable devant la tension de la corde.

On s'intéresse aux petits mouvements transversaux, c'est-à-dire orthogonaux à la direction initiale de la corde : le point de la corde situé à l'abscisse x au repos s'est déplacé à l'instant t de y(x,t) selon l'axe Oy :



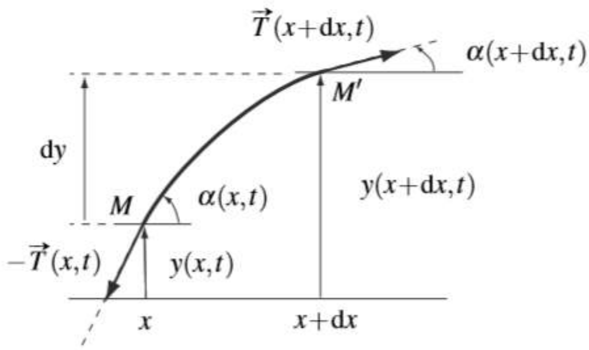
Nous appellerons α(x,t) l'angle que fait la tangente à la corde (représentée en pointillés courts ci dessus) au point x, à l'instant t, avec l'axe horizontal Ox.

On va ici ajouter une hypothèse très importante : les mouvements selon y de la cordes seront très petits (on suppose qu'il ne sont qu'une perturbation par rapport à un état de repos, la corde tendu horizontalement), ce qui revient à écrire :

$$|y(x,t)| \ll L$$
$$|\alpha(x,t)| \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| = |\tan\alpha| \ll 1$$

Les perturbations engendrées par le mouvement de la corde, par rapport à son état de repos, seront donc toutes supposées du premier ordre au moins en $\frac{\partial y}{\partial x}$.

1.1.3 Mise en équation



On va considérer un élément de la corde de longueur dx, délimité par M et M', et on va appliquer le PFD (bien sûr les angles sont exagérés pour plus de lisibilité). La masse de cet élément est $dm = \mu dx$ (dy négligeable), et il subit deux forces de tensions $-\overrightarrow{T}(x)$ et $\overrightarrow{T}(x+dx)$. (On a pris la convention de compter la force positivement ici lorsqu'on va dans le sens de x positifs, mais on peut faire l'inverse, ca changerait juste le signe de la fonction T(x)). On rappelle que le poids est négligé.

Comme on considère le mouvement de la corde suivant uniquement y, le PFD donne :

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{T}(x+dx) - \overrightarrow{T}(x)$$

Ce qui nous donne, en projection sur Ox et Oy

$$0 = (Tcos\alpha)(x+dx,t) - (Tcos\alpha)(x,t) \tag{1}$$

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (Tsin\alpha)(x+dx,t) - (Tsin\alpha)(x,t) \tag{2}$$

On rappelle que $\alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x} << 1$, et donc $cos\alpha(x,t) = 1$ et $sin\alpha(x,t) = \alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}$. Les équations deviennent alors :

$$0 = T(x+dx,t) - T(x,t) = \frac{\partial T}{\partial x}dx \tag{3}$$

$$\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T\alpha}{\partial x}dx \tag{4}$$

L'équation (3) nous informe que T ne dépend pas de x : T(x,t) = T(t).

Ensuite, on travaille en perturbatif donc on doit pouvoir écrire au premier ordre $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$ avec $\frac{T_1(x,t)}{T_0} << 1$. Dès lors, pour ne garder que les premier ordre, on a $T\alpha = T_0\alpha = T_0\frac{\partial y}{\partial x}$. En remplacant dans (4), on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{5}$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$. Cette équation est une équation de d'Alembert unidimensionnelle.

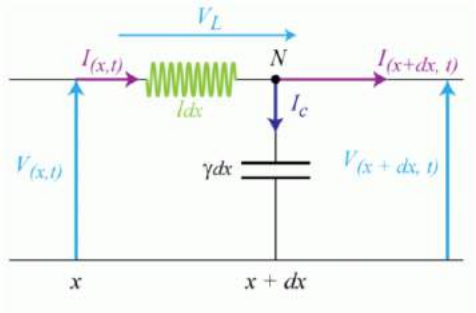
1.2 Cas du cable Coaxial

Avant d'étudier plus précisément cette équation dite de d'Alembert, on va brièvement présenter un autre exemple : la propagation d'un signal dans un câble coaxial supposé infini. On admet qu'une portion dx d'une câble coaxial peut être représenté de la sorte : (voir page suivante)

γ représente une capacité linéique et l un coefficient d'auto inductance linéique. On peut démontrer (cf : http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M02_G03_14/co/NLP_E_M02_G03_14.html) que :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{6}$$

en posant ici $c = \frac{1}{\sqrt{\gamma l}}$. On retrouve donc le même type d'équation, et la même équation pour I.



1.3 Équation de d'Alembert générale

On a vu qu'on avait une équation de forme générale (avec X grandeur physique) :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \tag{7}$$

Commençons par analyser le coefficient c dans le cas de nos deux équation. Par analyse dimensionnelle de l'équation, on remarque qu'il s'agit d'une vitesse. On peut rapidement faire l'analyse dimensionnelle dans le cas de la corde :

$$[c^2] = \frac{[T_0]}{[\mu]} = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}} = L^2T^{-2}$$

Donc on retrouve bien un vitesse, qui va correspondre à la vitesse de propagation de notre onde ! On va faire un petit tableau récapitulatif de ce que l'on vient de voir :

Situation	Grandeurs couplées	Expression de c	ODG
Corde	T, y	√(T0/μ)	350 m/s
Cable Coaxial	U, I	1/√(γL)	2.10^8 m/s

On peut citer aussi les ondes acoustiques (méca et thermo), ondes éléctromagnétiques (EM), ou les ondes de surfaces (méca flu). Donc touche de nombreux domaines de la physique.

L'équation de D'Alembert est une équation différentielle linéaire, ce qui est une caractéristique essentielle de la physique des ondes qui sont modélisables par cette équation. Cela signifie que n'importe quelle combinaison linéaire des solutions est aussi une solution. On peut l'écrire aussi pour un problème en 3D, avec une grandeur physique X , en prenant delta le Laplacien :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X$$

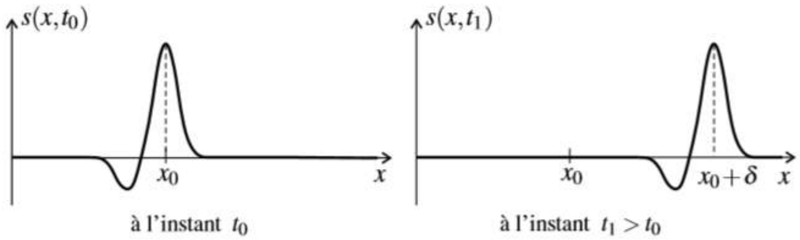
2 Solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle : ondes progressives

2.1 Ondes progressives

On a trouvé une équation générale, reste maintenant à étudier les solutions possibles. On va tricher un peu et on va partir directement de ce qu'on appelle ondes progressives, et on va montrer qu'elles sont solutions de notre équation de d'Alembert.

Définition d'une onde progressive : Une onde est dite progressive si elle correspond à la propagation dans l'espace et au cours du temps d'une perturbation (variation d'une grandeur physique). Cette propagation s'effectue sans transport de matière mais avec un transport d'énergie.

Pour leur donner une formulation mathématique, on va partir d'un exemple :



On a sur l'image la propagation d'un phénomène (ex : on secoue une corde) à deux temps différent. La perturbation se propage bien. Si on prend un temps $t_1 > t_0$, notre perturbation arrive qui était en x_0 en un point $x_0 + \delta$. Par définition de la vitesse, on à $\delta = c(t_1 - t_0)$. On a donc :

$$s(x, t_0) = s(x + \delta, t_1) = s(x + c(t_1 - t_0), t_1)$$

On peut choisir t_1 comme étant l'origine des temps (donc nul), et le t_0 que l'on avait introduit est arbitraire, on peut l'appeler t. On obtient :

$$s(x, t) = s(x - ct, 0) = f(x - ct) \tag{8}$$

Donc une onde progressive qui se déplace selon les x positifs sera de la forme $f(x - ct)$ (ou $f(t - \frac{x}{c})$. De même, on a un signe "+" à la place du signe "-" dans les cas d'une onde qui se propage dans le sens des x décroissant (démontrable mais pas le temps et même méthode qu'avant).

Relions maintenant ces fonctions à l'équation de d'Alembert. On a une fonction composée, f(u), avec u = x-ct. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\ puis\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial u}\ puis\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

On retrouve bien $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Fonctionne aussi avec f(x+ct). L'équation de d'Alembert est donc bien un équation d'onde.

2.2 Cas des ondes progressives harmonique

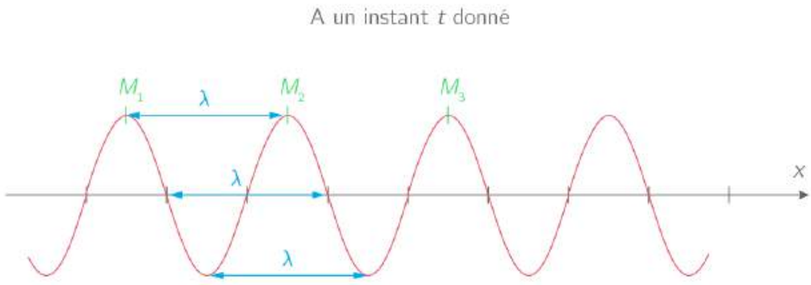
On va prendre un cas particulier d'onde progressive : une onde progressive harmonique. Celles-ci sont de le forme :

$$s(x,t) = s_0 cos(\omega t - kx + \Phi) \tag{9}$$

La seule possibilité pour qu'une telle onde vérifie l'équation de d'Alembert est d'avoir $k = \frac{omega}{c}$. Cette relation s'appelle la relation de dispersion.

k est le module d'onde, et on a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on retrouve ici la longueur d'onde déjà rencontrée au lycée. Il s'agit de la période spatiale de notre onde.

ω est la pulsation de notre onde. On a $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, où T est la période temporelle et f la fréquence.



Les OPPH ont peu de réalité physique,mais leur superposition oui, et D'Alembert linéaire donc permet la superposition !

3 Ondes stationnaires

3.1 Forme des ondes stationnaires

On va voir un autre type d'onde particulier, à l'origine de certains phénomènes physiques : les ondes stationnaires. On va partir de l'expérience de la corde de Melde : https://www.youtube.com/watch?v=ondU01Cmw-s.

Donc le vibreur fait osciller la corde à son extrémité, mais à l'autre bout (que l'on pose en x=0 pour cette partie), elle est fixée, la propagation est fixée : l'onde est réfléchie. Si la réflexion est parfaite, l'onde réfléchie à la même amplitude. L'onde réfléchie est de même pulsation, et comme elle se propage dans le même milieu le k est le même aussi. L'onde que l'on observe sur la corde est la somme des deux (le signe - permet de vérifier la non vibration de la corde en x=0.) :

$$s(x,t) = s_i(x,t) + s_r(x,t) = s_0 cos(\omega t - kx) - s_0 cos(\omega t + kx) = -2 s_0 sin(\omega t) sin(kx)$$

On a un découplage entre le temps et l'espace ; c'est la caractéristique de nos ondes stationnaires, elles s'écrivent de la forme s(x,t) = f(x)g(t).

Si on implante dans d'Alembert cette forme, on trouve nécéssairement un résultat de la forme :

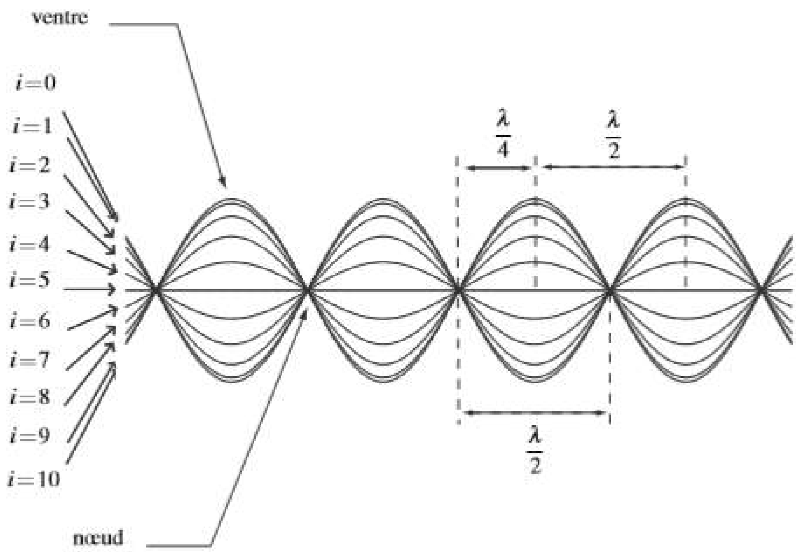
$$s(x,t) = s_0 cos(kx + \Phi) cos(\omega t + \Psi) \; avec \; k = \frac{\omega}{c} \tag{10}$$

3.2 Propriétés des ondes stationnaires

Les ondes stationnaires ne transportent pas d'énergie.

On le voit bien sur la formule de l'onde stationnaire, pour certains x, l'onde demeure nulle quel que soit t : il s'agit des x tels que $\cos(kx + \Phi) = 0$ soit $kx_n + \Phi = (n + 1/2)\pi$. On appelle ces points des **noeuds**, et ils sont donc distant de $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$.

De même, les points tels que puisse être l'amplitude soit maximale sont tels que $kx_m + \phi = m\pi$, et ils sont donc aussi distant de $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$. Pour résumer :



3.3 Régime libre d'une corde fixée à ses deux extrémités.

On a vu la cordre de Melde, mais j'ai volontairement passé un détail sous silence : on observe les ondes stationnaires seulement pour certaines fréquences, ce qui ne s'explique par ce qu'on a vu précédemment. En réalité, on ne s'est intéressé qu'à la condition limite à droite, lorsque la corde arrive sur la poulie. En réalité, l'onde retour est aussi réfléchie au niveau du vibreur. On a donc deux conditions limites pour notre onde stationnaires, puisqu'on à nécessairement des noeuds pour ces deux positions ! On prend un corde longueur L fixé à ces deux extrémités. Les conditions limites sont donc :

$$y(0, t) = 0 \ et \ y(L, t) = 0 \ \forall t$$

Donc en prenant une onde de la forme stationnaire, on doit avoir pour tout t :

$$\begin{cases} y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(\psi) = 0 \\ y(L,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\psi) = 0 \\ \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi = \frac{\pi}{2} \\ \sin(kL) = 0 \quad \text{donc} \quad kL = n\pi, \quad n \text{ entier.} \end{cases}$$

Donc au final notre k, et donc notre ω, sont quantifiés :

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \text{ , } \omega_n = k_n c = n\frac{\pi c}{L} \textit{ soit } f_n = n\frac{c}{2L} \tag{11}$$

On retrouve la notion de fréquence fondamentale f_0 (qui vaut ici $\frac{c}{2L}$ vu au lycée, avec ensuite des harmoniques qui sont des multiples de cette fréquence fondamentale. Un mode de vibration selon une de ces fréquences est appelé mode propre.

On a vu que, pour une longueur de corde fixée, seul certaines fréquences sont possibles. C'est sur ce principe que repose les instruments à cordes comme les guitares : on pince au niveau d'une frette pour "forcer" la corde à avoir une certaine longueur L, et cette longueur ne permet à notre corde de vibrer qu'à certaines fréquences, ce qui nous donne les notes souhaitées.

En TP on s'intéressera à l'accordage d'une guitare. Les étudiants devront trouver un protocole pour calculer la tension qu'il faut appliquer à une corde pour qu'elle donne un mi (82,41 Hz) à vide (donc de longueur connue).

Protocole attendu : Trouver la fréquence du mi par analyse spectrale, mesure de masse linéique d'une corde, mesure de a longueur à vide sur une guitare, $f_n = \frac{\sqrt{T/\mu}}{2L}$.

Conclusion

On a développé un formalisme d'onde très général, qui s'applique dans de nombreux champs de la physique. On retrouve même cette notion d'onde en quantique, même si cela reste différent. Ce qu'il faut retenir c'est l'équation de d'Alembert, et la forme des ondes progressives et stationnaires qui sont toutes deux des solutions. On a fait une bonne introduction aux ondes, mais il nous reste des cas particuliers à voir, comme les ondes acoustique ou les OEM, mais ce sera le sujet d'un prochain cours.

Remarques/Questions

- La longueur de la corde varie t elle avec l'onde ? A priori non d'après les hypothèses, sinon force de rappel élastique.

- Quelles sont les hypothèses pour déterminer l'équation d'onde acoustique ?

Isentropie (Evolution adiabatique et réversible) et bien sûr l'onde est seulement un perturbation du milieu.

- Est-ce que toutes les ondes vérifient d' Alembert ?

Non, par exemple une onde évanescente ne la vérifie pas, ou certains mode dans le cable coaxial (mode TE ou mode TM) non plus.

- Qù est-ce que c'est une onde plane ? On dit plane en opposition à quoi en général ?

Une onde plane est une onde dont les surfaces d'onde (points tous en phases) sont des plans. On oppose cela aux ondes sphériques.

-Comment définir l'information en physique quand vous dite que l'onde transporte une information ? fonction mathématique que l'on peut mesurer.. A faire attention car le terme information veut tout et rien dire.

-Cable coaxial, il y a plein de mode, a quel type de mode s'intéresse cette propagation ? valable uniquement pour les modes TEM dans l'approx des régime Quasi permanent.. Pourquoi pas valable pour les autre modes ? pas même équation d'onde. Ce type d'équation (d'Alembert) on suppose qu'on a un champ E d'un conducteur à un autre TE, ou TM : pas de différence de potentiel, on peut définir des équations d'ondes mais pas celle la.

-Attention, ondes stationnaires ont de l'énergie mais ne se propagent pas : ne se déplace pas du tout, sur une moyenne, sur une période ? puissance instantanée non nul mais moyenne nulle.

-Plan pas d'accord et le temps dessus ! III-3 : résonance donc à éviter ici et très peu de considération sur l'énergie de propagation, donc ca limite la leçon

Plan conseillé

http://www.sup-numerique.gouv.fr/pid33288/catalogue-ressources-pour-auto-formation.html?ressourceUrl=http%3A%2F%2Fwww.sup-numerique.gouv.fr%2Fressources-pedagogiques%2Fnotice%2Fview%2Foai%25253Acanal-u.fr%25253A59

I - Corde de Melde

1)Mise en équation

2)Généralité sur equation d'onde (linéarité, renversement du temps...

3)Solution générale f(x-ct) + d(x+ct)

II - Ondes progressives

1)Solution monochromatique (cos(wt-kx))

2)Discussion énergétique

III - Ondes stationnaires

1)CL corde pincée .. corde libre

2)Bilan énergétique

3)CL général impédance accoustique

4)Discussion