LP 18 : Phénomène de transport

Rapport jury : Les analogies et différences entre les phénomènes de transport doivent être soulignées tout en évitant de dresser un simple catalogue. Le jury a regretté de ne pas avoir vu d'illustration expérimentale, même simple, des transferts thermiques. Les expériences de mise en évidence de la diffusion de particules doivent être réalisées dans des conditions où le phénomène de convection n'est pas dominant. La leçon ne peut se limiter à la présentation d'un unique phénomène de transport.

Bibliographie :

[1] Sanz - Physique Tout-en-un PC/PC* - Dunod
[2] https://www.editions-petiteelisabeth.fr/calculs_transfert_chaleur_7.php
[3] https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9sistance_thermique_de_conduction
[4] Faroux/Renault - Thermodynamique - Dunod

Niveau : Licence

Pré-Requis :

- Premier et Second principe de la thermodynamique
- Conservation de la matière
- Conduction électrique
- Mécanique des fluides
-Tous les flux (le but étant de les comparer)

Introduction :

Jusqu'à présent en thermodynamique, on a étudié des systèmes à l'équilibre. Mais la question est: Comment arrive-t-on à cet équilibre ? Si on part d'un système avec des inhomogénéités, on sent bien qu'il va y avoir un transport de grandeurs physiques pour rétablir l'homogénéité et parvenir à l'équilibre.

Donc les phénomènes de transport c'est:

-Une grandeur physique conservée (nombre de particules, énergie, charge...) est transportée dans le système.

-Dû à l'inhomogénéité d'une grandeur physique intensive (exemple:Température), et tend à lisser cette homogénéité par transport d'une grandeur extensive (exemple : flux d'énergie).

-Un phénomène irréversible (2nd principe).

Ainsi la diffusion moléculaire est due au transport du nombre de particules par unité de volume, la diffusion thermique au transport de l'énergie, la conduction électrique au transport de la charge électrique.

Au cours de cette leçon on va s'attacher à décrire la diffusion thermique de façon rigoureuse puis de décrire l'analogie entre les différents phénomènes de transport.

I - Diffusion thermique

Manipulation : avec ce dispositif: http://jjdurey.free.fr/document/conductimetre.pdf, on mesure la température ambiante et la température de l'eau (chaude de préférence!!) puis on plonge le capteur avec les 4 métaux dans l'eau. On remarque que la température du corps froid augmente. Au sein de la barre métallique la température n'est plus uniforme (coloration des cristaux liquide) → il y a diffusion thermique.

On a étudié jusque là les transferts thermiques entre 2 états d'équilibre par application du premier principe. Le second principe nous a permis de comprendre le sens des transfert thermique : chaud vers le froid. → Maintenant on s'intéresse au facteur temporel au sein des transferts thermiques.
On étudiera donc des systèmes qui ne seront pas à l'équilibre thermodynamique pour cela on utilisera l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local : c'est à dire qu'on peut diviser ce système en plusieurs volumes mésoscopiques (10^{-10} à 1m) considérés à l'équilibre afin de décrire le système comme une réunion de système thermodynamique à l'équilibre.

Les différents modes de transfert thermiques:

- Conduction thermique (=diffusion): transport d'énergie à travers un milieu matériel sans déplacement macroscopique de matière dû à l'agitation thermique des particules microscopiques.
- Convection thermique : transfert thermique dû à déplacement de matière. Lorsque la matière plus chaude est en dessous d'une matière plus froide, la matière chaude étant plus légère tend à s'élever provoquant l'apparition d'un mouvement d'énergie thermique macroscopique.
- Rayonnement : transfert d'énergie à travers un milieu transparent par l'intermédiaire d'un rayonnement électromagnétique.

On néglige pour la suite le rayonnement et la convection.

1) Flux thermique, vecteur densité de courant thermique

On appelle flux thermique Φ, la puissance fournie à un système par transfert thermique.
C'est la quantité d'énergie qui travers une surface par unité de temps : $\Phi = \frac{\delta Q}{dt}$ (en W)

$\Phi = \oint_S \varphi_{ext \to S} dS$ avec φ le flux thermique surfacique (en W/m²)

φ et Φ sont algébriques: >0 si le transferts thermique est reçu par le système.
On peut introduire le vecteur densité de courant thermique : $\mathbf{j_{th}}$.

Soit $\Phi = \int_S j_{th} dS$ avec $||\mathbf{j_{th}}||$ en W/m² (équivalent à une flux thermique surfacique)
On considère la surface élémentaire **dS**=dS.**n**
L'énergie thermique se déplace dans la direction pointée par le vecteur $\mathbf{j_{th}}$. Donc Φ>0 si l'énergie traverse la surface dans le sens de **n**.

Attention par exemple pour une surface fermée par convention **n** est dirigé vers l'extérieur. Il faut donc rajouter un signe - pour que Φ > 0 si l'énergie est reçue.

A l'interface entre 2 milieux, il y a continuité du flux thermique surfacique $\mathbf{j_{th}}$.

2) Bilan énergétique : Bilan thermique

On utilise le premier principe de la thermodynamique à un volume élémentaire (cylindre).

dU= δQ + P_{prod}.dt avec P_{prod} correspondant aux termes sources (effet Joule, r"action chimique, changement de phase, réaction nucléaire..)

Hypothèses:
-milieu à volume constant
-frontière fixe → le système ne reçoit aucun travail mécanique.

On travaille à une dimension : T(x,t) et $\mathbf{j_{th}}$(x,t)
On effectue le bilan énergétique du cylindre entre t et t+dt.

- Variation d'énergie interne du système:

dU = U(t+dt)-U(t) = δm c(T(x,t+dt)-T(x,t)) = $\rho Sc.\frac{\partial T}{\partial t} dt\ dx$

- Transfert thermique reçu par le système entre t et t+dt:

en x : δQ_x = Φ (x,t).dt
en x+dx : δQ_{x+dx} = **-** Φ (x+dx,t).dt (signe - car c'est transfert th. reçue et jth sort vers l'extérieur)

Soit $\delta Q_{ext \to syst}$ = δQ_x + δQ_{x+dx} = $-\frac{\partial \Phi}{\partial x} dxdt$

- Energie produite :

P_{prod}.dt =P_v.dx.S.dt car le système ne reçoit pas de travail mécanique
avec P_v la puissance volumique produite.

On a donc $\rho Sc.\frac{\partial T}{\partial t} dt\ dx = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx\ dt$ + Pv.dx.S.dt
Or Φ (x,t)=j_{th}.S car $\mathbf{j_{th}}$=j_{th}.u_x

$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$ = Pv
(on peut supprimer les sources internes)

En 3D, on a : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div(j_{th})$ = P_v
→ **Bilan thermique local :** traduit la conservation densité de flux.
On remarque que la surface S choisie n'est pas dans l'équation, équation valable quelque soit S.

3) Loi de Fourier : conductivité thermique

Loi expérimentale: $\mathbf{j_{th}}$= - λ **grad**(T)
λ : la conductivité thermique

-Loi linéaire entre $\mathbf{j_{th}}$ et **grad**(T)
-Phénomène irréversible

La conduction thermique se manifeste par l'existence d'un vecteur densité de courant thermique orienté dans le sens des température décroissante (d'où le signe **-**) →

spontanément les transferts thermique les transferts thermiques se produisent du corps chaud vers le corps froid (2ème principe).

Limite de validité:
C'est une loi phénoménologique, sans théorie donc cette loi n'est pas valable dans tous les cas:
- Si grad(T) trop fort: la loi n'est plus linéaire
- Si grad(T) trop rapide: relation entre le flux et grad(T) n'est plus instantanée.
- Dans les milieux anisotropes où la conductivité thermique dépend de la direction: le flux thermique n'est plus forcément colinéaire à grad(T).

La conductivité thermique λ (en $W.m^{-1}.K^{-1}$): c'est l'énergie transférée par unité de surface et de temps sous un gradient de température de température de 1K par mètre. Cela représente l'aptitude à transférer la chaleur d'un matériau.

Les métaux purs solides ont les conductivités thermiques les plus fortes (dû aux électrons libres).
λ(solides métalliques)>λ(liquide)>λ(gaz)

→ Lien microscopique : La conduction thermique est dû à l'agitation thermique des particules microscopique. Au cours des chocs qui en résultent les particules des zones chaudes qui ont le plus d'énergie cèdent de l'énergie aux particules des zones froides. Mécanismes: chocs moléculaires/ transmission par vibration des atomes et molécules/ transmission électrons libres.

→ Faire lien avec la manip

4) Equation de diffusion thermique

En combinant la loi de Fourier et le bilan énergétique

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -div(-\lambda grad(T)) + P_v$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda/\rho c).\Delta T + (1/\rho c).P_v$$

→ Equation de la diffusion thermique : elle montre l'inhomogénéité de T, irréversible dt→ -dt, phénomène de diffusion.

Si on a pas de sources internes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda/\rho c).\Delta T = a\,\Delta T$$

avec a= λ/ρc la diffusivité thermique (équivalent au coefficient de diffusion thermique en m²/s), c'est la capacité d'un matériau à transmettre un signal de température d'un point à un autre. Elle dépend de la capacité du matériau à conduire la chaleur, accumuler la chaleur.

ODG

On peut alors avoir un ODG de la durée t et de la longueur L caractéristique du phénomène:
L ≃ $\sqrt{a.\tau}$, τ ≃ L²/a
→ Caractéristique des phénomènes diffusifs.

5) **Régime permanent**

Les équations locales se simplifient.

Bilan thermique : $div(j_{th})$ = P_v ↔ $\iint j_{th} dS = \iiint P_v.dV$

Tout l'énergie produite à l'intérieur du système est évacuée par transfert thermique à travers sa surface.
Si il n'y a pas de sources internes : $div(j_{th})$ = 0, j_{th} à flux conservatif (flux entrant=flux sortant)

Equation de diffusion: $0= \Delta T + (1/\lambda).P_v$

en l'absence de sources internes ΔT = 0 → Le champs de température vérifie la loi de Laplace.

-Résistance thermique [2][3]
La résistance thermique de conduction exprime la résistance d'un corps au passage d'un flux de conduction thermique. Cette résistance s'applique aux solides et aux fluides immobiles. Cette notion n'est valable qu'en régime stationnaire (en régime transitoire : notion de quadripôle thermique).

Analogie avec l'électrocinétique: lorsqu'on soumet une différence de potentiel U à un corps, on provoque une circulation des charges électrique quantifié par l'intensité du courant I:
$R=U/I = (V_1-V_2)/I$

Ainsi $R_{th}= (T_1-T_2)/\Phi_{th\ 1\to2}$
C'est la résistance dû à une différence de température entre 2 surface isothermes par rapport aux flux de chaleur.

On peut aussi exprime la conductance thermique $G_{th}=1/R_{th}$ (en W/K)

R_{th} fonctionne comme $R_{él}$: 2 R en série sont traversés par le même flux (addition des résistances).

Application : DIAPO
-On néglige les effets de bords supposant que S>>e et que les matériaux sont isotropes.
- Si on souhaite une paroi adiabatique (zéro perte de chaleurs), il faut R→ ∞.
On comprend mieux d'après l'application le principe du double vitrage.

6) **Application onde de chaleur [1][4]**

On s’intéresse aux variations de chaleur au niveau du sol. Pour savoir à quelle profondeur doit-on creuser une cave? A quelle profondeur enterrer les canalisation d’eau pour pas qu’elle ne gèle?

On soumet un milieu à une variation sinusoïdale (T varie avec le temps). On s’intéresse au demi espace x<0.
En x=0 $T(0,t) = T_o + T_1.\cos(wt)$ avec T_o, la température moyenne

On cherche T(x,t).
On travaille à la profondeur x avec un certain retard et avec une amplitude dépendant de la profondeur : $T(x,t) + To +T_1(x)\cos(wt-\varphi(x))$
En complexe, on pose : $\theta(x,t) = T(x,t)-T_o= Re(T_1(x).\exp(iwt))$
On injecte dans l'équation de diffusion: $\frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda/pc). \Delta T$
$iw.T_1(x).\exp(iwt)= (\lambda/pc)T_1''(x).\exp(iwt)$
$T_1''(x) - (iw/a).T_1(x)=0$

$$T_1(x) = \underline{A} \exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) + \underline{B} \exp\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)$$

$\begin{cases} \text{Si } x \to \infty \; ; \; T_1(x) \to 0 \text{ alors } \underline{B} = 0 \\ \text{Si } x = 0 \; ; \; \underline{\theta}(0,t) = T_1 \text{ donc } \underline{A} = T_1 \end{cases}$

$\hookrightarrow T(x,t) = T_0 + T_1 \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \qquad \delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$

La répartition de la température dans le sol correspond à une onde thermique plane progressive atténuée se propageant suivant x se propageant à la vitesse $\sqrt{2a\omega}$.

δ : distance caractéristique d'atténuation.
L'onde est très vite atténué au cours de sa propagation dans le sol.

$\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \approx \sqrt{a\tau}$ — plus variation est lente alors δ diminue.

↳ c'est caractéristique d'une équation de diffusion
car $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} \sim \sqrt{a\tau}$ ce qu'on a vu avant.

$\langle a_{sol} \rangle = 6{,}5 \cdot 10^{-7}\ m^2/s$ (variable avec le sol et l'humidité)

On modélise les variations annuelles par une sinusoïde car 1er janvier (le + froid) $-10°C$ et le 1er juillet (le + chaud) $30°C$.

$$\left.\begin{aligned} T(0,0) &= T_0 + T_1 = -10°C \\ T(0,\tau/2) &= T_0 - T_1 = 30°C \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} T_0 &= 20°C \\ T_1 &= -20°C \end{aligned}$$

Pour $\tau = 1$ an $\longrightarrow \delta = 2{,}5\,m$
Pour $\tau = 1$ jour $\longrightarrow \delta' = 14\,cm$.

• Pour une cave, on souhaite que les variations annuelles aient une amplitude inférieure à 2°C
on veut que $\left|T_1 \exp\left(-\frac{x_0}{\delta}\right)\right| < 2$

$$x_0 > \delta \ln\left(\frac{20}{2}\right) \simeq 6m$$

• Pour les canalisations, les variations journalières à 1m sont divisé par 10^3. Donc les canalisations sont à au moins 1m.

II- Comparaison de différents phénomènes de transport:

1) Conduction électrique

Un courant électrique est un mouvement d'ensemble des porteurs de charges électrique au sein d'un matériau. Contrairement à la diffusion thermique les déplacements de charges sont imposés par l'action d'une force électromagnétique.

Par analogie avec $\vec{j}_{th}$: on a $\vec{j}$ la densité de courant décrivant la courant électrique à l'échelle locale. $(A.m^{-2})$

relié à l'intensité du courant

$$i = \iint \vec{j} . \vec{dS}$$

Une loi empirique décrit aussi ce phénomène, la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \, \vec{grad} \, V$$

σ conductivité électrique $(\Omega^{-1}.m^{-1})$

↳ En chaque point du conducteur $\vec{j}$ est proportionnel à $\vec{E}$.

Comme pour λ, σ caractérise l'aptitude d'un milieu à laisser les charges électriques se déplacer.

Matériau	σ (Ω^{-1}/m^{-1})
Cuivre	$5,8.10^{7}$
eau pure	$5,6.10^{-6}$
Polystyrène	10^{-20}

En comparaison à l'échelle des conductivités thermiques, les valeurs de σ sont très étendues.
- Tout comme λ, les métaux sont de très bon conducteurs électrique : c'est 2 phénomènes sont dûs aux électrons libres.

On a aussi une équat° de conservation de la charge :

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ avec ρ la densité de charge électrique

À partir de $\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V$

on retrouve $R = \frac{U}{I} = \frac{V_1 - V_2}{I}$

↳ résistance électrique.

On a l'équation de d'Alembert pour décrire l'équation du champ électrique E

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = 0$$

2) Diffusion de particules

↳ très similaire à celui de la diffusion thermique

les 2 proviennent de l'agitation thermique.

↳ Phénomène irréversible.

⇒ Possible vidéo exp

On peut décrire à l'identique, la diffusion de particules où on remplace la température T par n la densité moléculaire (en m^{-3})

On peut décrire le flux de particules :

$$\phi = \iint \vec{j_N} \cdot d\vec{S}$$

le nombre de particules traversant une surface

$$dN = \phi \, dt = \iint \vec{j_N} \cdot d\vec{S} \, dt$$

avec $\vec{j_N}$ le vecteur densité de courant de particules (nbre de part/m^2/s)

↳ $\vec{j_N} = n \cdot \vec{v}$

Une loi empirique décrit aussi ce phénomène irréversible : la loi de Fick. coeff de diffusion (m^2/s)

$$\vec{j}_N = -D \, \overrightarrow{grad} \, n \quad \text{(loi linéaire)}$$

On constate expérimentalement que les molécules diffusent de l'endroit où leur densité est la plus importante vers l'endroit où leur densité est la plus faible.

Le flux de particules veut réduire le déséquilibre
↳ principe du phénomène de transport.

On a aussi pour ce transport un coefficient de diffusion D, il dépend du milieu et de la nature de la particule

Type de diffusion	D (m^2/s)
Mol dans un gaz	10^{-6} à 10^{-4}
Mol dans un liq	10^{-12} à 10^{-8}
Atomes dans un sol	10^{-30} à 10^{-16}

↳ les limites sont les mêmes

On peut comparer aux coefficients de diffusivité thermique, on remarque que D des molécules dans un gaz sont du même ODG, tandis que ~~…~~ ensuite D diminue. De manière générale, la diffusion thermique est alors un phénomène ⊕ rapide que la diffusion de particules.

On a enfin l'équat° de conservation de la matière

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_N = P$$

↳ nombre de particules produites / volume et tps.

↳ géométrie quelconque

On peut alors décrire ce phénomène par une équation de diffusion :
(sans termes sources)

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n = 0$$

On retrouve en régime permanent, une résistance de diffusion : $R_{diff} = \frac{n_1 - n_2}{\phi}$

3) Diffusion de quantité de mouvement

Due au phénomène de viscosité.

↳ il faut imaginer qu'on découpe un fluide en plusieurs couches mésoscopiques.

Chaque couche avance à sa propre vitesse et glisse sur les couches adjacentes, ce mouvement de glissement, chaque couche exerce une force tangentielle et les entraîne ou les freine.

Pour un écoulement de cisaillement :

$$\vec{v} = v_x(y,t)\vec{u_x} \quad \text{(fluide Newtonien)}$$

$$\vec{dF_x} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS\vec{u_x}$$

↳ on peut maintenant montrer que la viscosité de cisaillement se traduit par un transport de qté de mouvement.

il y a alors une équation de diffusion de la qté de mouvement par unité de volume :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{p} = 0$$

↳ viscosité cinématique

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$

On peut ainsi définir un vecteur densité de courant de qtité de mvt ; analogue à $\vec{j_H}$ et $\vec{j_N}$:

La loi de Newton $\vec{j_p} = -\nu \, \vec{grad}\, p$

On retrouve aussi l'équation locale de la conservation de la qtité de mvt :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \vec{div}\, \vec{j_p} = 0$$

Vérification expérimentale : lorsqu'on regarde l'extension de la zone où la qtité de mvt a diffusé par rapport au $\sqrt{t}$; on a une linéarité entre δ et $\sqrt{t}$: phénomène diffusif.

Conclusion : résumé des différents modes de transports (DIAPO)
Nous avons vu dans cette leçon les différents mécanismes permettant de mettre en équation les phénomènes de transport. La diffusion est un de ces phénomènes, et que ce soit pour les particules ou pour la chaleur, les équations sont identiques, et une forte analogie peut être développée entre ces deux phénomènes.

<u>**Remarque :**</u>
-Équation de Shrödinger est aussi une équation de transport : elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive (electron, proton) non relativiste.
<u>-Expérience métaux -lecteur cristaux liquides :</u> Lorsque la lumière polarisée provenant du premier polariseur traverse un cristal liquide, elle se dédouble en deux rayons de polarisation différente. Du fait de la biréfringence, un déphasage se produit entre les deux polarisations, entraînant une polarisation elliptique de la lumière. Ainsi, lors du passage dans le deuxième polariseur, il existe une composante suivant l'orientation du polariseur qui permet le passage de lumière avec une intensité donnée.
-Attention à la partie II de ne pas faire un catalogue : montrer simplement que les équation thermique/particule/quantité de mouvement sont identiques/ réaliser par exemple un calculs pour l'encre dans l'eau/ équation de diffusion d'un conducteur (plus compliqué qu'un

phénomène simple de diffusion: les charges vont se mettre au bord div(E)=p/e_o, possibilité de faire le lien avec l'effet de peau.
-Comparatif diffusion/convection/rayonnement : dans la diffusion $\Phi \propto (S\lambda/L).\Delta T$, pour la convection $\Phi \propto S.h.\Delta T$, dépend pas de la distance L mais plutôt de la couche limite, pour la rayonnement $\Phi \propto S_{émet}\ \Omega\ .\Delta T^4$ le rayonnement dépend de la directivité (angle solide lié à L)
-Bien comprendre ce qu'est l'échelle mésoscopique.

Questions :
-Quelle est la différence entre a et λ? a est en non stationnaire et λ en stationnaire.
- Si j'envoie un dirac sur l'équation de diffusion que ce passe-t-il? réponse en gaussienne. Et si j'envoie un échelon? réponse fonction erf.
-Calculer le coefficient D par approche statistique :
https://femto-physique.fr/physique_statistique/pdf/diffusion_moleculaire.pdf
-En été que signifie température ressentie? Avec du vent, couche limite est réduite et donc donc baisse la température de la peau. La résistance thermique naturelle de la peau est moins important.
-Pourquoi a(air) ~a(acier)? Car la masse volumique est très faible donc chauffe rapidement.
-Quand utilisons nous la résistance thermique? Lorsque t_{evol}>>t_{diff} (ARQS)
-Est-ce que la convection dépend de la viscosité? Oui, il faut augmenter la température.
-Est-ce que le concept de résistance thermique est généralisable à tous les phénomènes de transport, quel est son analogue dans les écoulements visqueux ? La couche limite
- Equation de diffusion est elle généralement simple à résoudre ? combien de conditions aux limites et initiales faut il ? allure des solutions typiques ?
-Sur la réversibilité, qu'en est-il pour Schrödinger? il faut conjuguer donc on conserve la réversibilité.