

LP 02 : Gravitation

Niveau : CPGE 1ère année

Prérequis : Dynamique du point, électrostatique, coordonnées sphériques et angle solide, théorie cinétique des gaz.

Remarques Jury :

Les applications ne doivent pas nécessairement se limiter à la gravitation terrestre. Les analogies entre l'électromagnétisme et la gravitation classique présentent des limites qu'il est pertinent de souligner.

Bibliographie :

- Mécanique, Pérez
- La gravitation, Chérif Zanazui
- Physique Sup PCSI - ed. Tec et Doc

Introduction : La gravitation est l'une des 4 interactions fondamentale de la physique et c'est la première qui a été découverte par Isaac Newton. Pourtant, dès l'antiquité, les scientifiques étudiaient les mouvements des étoiles, régi par cette loi. Kepler, au début du XVIIème siècle, énonce 3 lois basées sur des observations (vue lycée) :

- Loi des orbites (les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers).
- Loi des Aires : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux
- Loi des périodes : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.

Newton , un demi siècle plus tard, énonce la théorie de la gravitation qui rend bien compte de ces observations. On va dans cette leçon présenter cette théorie.

I - Interaction gravitationnelle

1) Force de gravitation

Faire un schéma avec des points M1 et M2 de masse m_1 et m_2 , et le vecteur unitaire.

La masse 1 exerce sur la masse 2 une force de gravitation dont l'expression est :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{M_1 M_2}\|^2} \vec{e}_{1 \rightarrow 2}$$

où G est la constante universelle de gravitation $G=6,672 \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$. On remarque que cette force est toujours centrale (toujours dirigée suivant l'axe entre les deux points) et attractive. De plus, le principe de réciprocité nous indique que le le corps 1 subit exactement la même force en norme, simplement dirigée vers M2.

Dans la suite, pour simplifier, on place l'origine O en M_1 et on se place en coordonnée sphérique, de telle sorte que $\vec{F} = -G.m_1 m_2 / r^2 \cdot \vec{e}_r$. C'est une force centrale.

Cette force est conservative (le calcul de son travail ne dépend pas du chemin suivi), elle

dérive donc d'une énergie potentielle :

$$F = -\text{grad}(E_p) \text{ avec } E_p = \text{cst} - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

On prendra comme convention l'énergie nulle à l'infini de telle sorte que la constante soit nulle.

2) Champ gravitationnel

On remarque que, en reprenant le cas précédent, on peut considérer qu'une masse m_1 ponctuelle "créé un champ gravitationnel" dans tout l'espace, qui engendre une force sur chaque autre masse ponctuelle m_2 , de sorte que :

$$\mathbf{F} = m_2 \mathbf{G} \text{ avec } \mathbf{G} = -Gm_1/r^2 \cdot \mathbf{e}_r$$

On remarque que ce champ $\mathbf{G}$ est homogène à une accélération : on appelle cela le principe d'équivalence.

Si en réalité on a un ensemble de masses ponctuelles m_j , alors le champ total est simplement la somme vectorielle des champs $\mathbf{G}_j$ (dédit d'après des expériences). On peut donner l'expression du champ $\mathbf{G}$ créé par une distribution quelconque de masse (en sommant les contributions des masses ponctuelles infinitésimales):

$$\vec{g}(M) = \iiint_{\text{astre}} -G\mu(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau.$$

où μ est la masse volumique et les P sont les points de l'astre. On peut déjà remarquer une ressemblance avec le champ $\mathbf{E}$ créé par une distribution de charge, mais on reviendra sur ce point plus tard...

3) Cohérence avec Kepler pour le système Terre-Soleil.

Isaac nous présente des lois, mais ces dernières sont-elles en accord avec les lois de Kepler ? On va vérifier ça pour la 3ème loi, avec le système Terre-soleil.

On choisit le référentiel héliocentrique, qu'on suppose galiléen. Ce choix paraît censé car le soleil est environ 10^6 fois plus lourd que la Terre : il est donc plus logique de le considérer immobile. On considère les deux astres comme des points de masse M pour le soleil et m pour la Terre.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r.$$

La Terre subit donc une force centrale de la forme

Cette force est dite centrale et newtonienne (en $1/r^2$). Le moment d'une force centrale étant nul (ça se voit vectoriellement) on a conservation du moment cinétique de la Terre par rapport au soleil : le mouvement est donc nécessairement plan. On a (si on calcule r et v , et que l'on applique la conservation) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = mr^2\dot{\theta} = \text{constante}.$$

Or l'aire balayée pendant dt est directement proportionnelle à $r^2\dot{\theta}$: on vient de démontrer la seconde loi de Kepler. Les autres sont plus chiantes à démontrer avec des ellipses et des coniques...

II - Propriétés du champ gravitationnel.

1) Potentiel gravitationnel

Dans cette partie, on peut démontrer que l'on peut rattacher un potentiel V à un champ gravitationnel $\mathbf{G}$: $\mathbf{G} = -\text{grad}(V)$. Démo redondante avec l'énergie potentielle... On peut montrer aussi en utilisant cela que la circulation de $\mathbf{G}$ le long d'un contour fermé est nul (donc circulation conservative, donc rotationnel nul) mais présente assez peu d'intérêt pour la suite.

2) Flux du champ et théorème de Gauss

On va maintenant s'intéresser au flux de notre champ $\mathbf{G}$, et on va pouvoir développer une analogie avec l'électrostatique :

Par définition du flux : $\Phi = \iint_S \vec{g}(M) \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dS \vec{n}$

$$\Phi = \iint_S -G \frac{m_0}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = \iint_S -G m_0 d\Omega \quad \leftarrow \text{angle solide}$$

Donc si on prend une surface fermée, on intègre sur tout l'angle solide ; on obtient :

$$\Phi = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_0 \quad \text{Théorème de Gauss}$$

où m_0 est la masse à l'intérieur de la surface

Forme locale : $\text{div}(\vec{g}) = -4\pi G \rho$

$$\left(\text{Car } \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{g}) d\tau \right)$$

On a ici une analogie entre l'électrostatique et la mécanique :

Electrostat	$\mathbf{G}$	Densité de charges	$1/\epsilon_0$
Méca	$\mathbf{E}$	Masse volumique	$(-4\pi G)$

On va appliquer ce théorème de Gauss dans le cas d'un astre

3) Application au champ d'un astre

On suppose un astre sphérique de rayon R , de masse volumique ρ uniforme, et de masse m . On a donc la symétrie sphérique (invariance par rotation), ce qui nous permet d'écrire $\mathbf{G} = g(r) \cdot \mathbf{e}_r$. On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r , on obtient facilement deux résultats (en fonction de si $r < R$ ou non) :

- Si $r > R$: $g(r) = -Gm/r^2$ (semblable à précédemment)
- Si $r < R$: $g(r) = -Gmr/R^3$.

On peut calculer les potentiels V , dans le premier cas la constante d'intégration est donnée par $V(r) = 0$ à l'infini, dans le deuxième cas on pose la continuité de V en R .

On peut tracer l'évolution de g avec la distance.

A.N. : Surface de la Terre : $g(R_T) = 9,81$ avec $m = 5,17 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6370$ km. On retrouve bien le g habituel !

On a négliger ici que la Terre était une ellipse, et la force centrifuge.

III - Applications

1) Vitesse de libération

Il s'agit de la vitesse minimale que l'on doit donner à un corps pour qu'il puisse "quitter l'influence de la Terre". Concrètement, l'énergie cinétique tend à libérer le corps, alors que l'énergie potentielle de pesanteur tend à le ramener. Le cas limite est donc lorsque ces deux énergies se compensent exactement (on considère le système Terre-objet isolé) :

$$E_c + E_p = 0$$

En réutilisant $E_p = -m_1 m_2 G/R$ pour un satellite qui part de la surface de la Terre, et $E_c = m_1 v_l^2/2$, on obtient :

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

Pour la Terre, on trouve une vitesse de 11,2 km/s. Pour la lune 2,4 km/s. A noter que cette vitesse ne dépend que de l'astre et pas de l'objet : on va donc l'utiliser sur les molécules de gaz pour expliquer l'atmosphère terrestre.

2) Atmosphère

La théorie cinétique des gaz nous donne le théorème d'équipartition de l'énergie, on peut en déduire la vitesse quadratique moyenne des molécules ($E_c^T = 5/2 kT$, et $E_c = 1/2 m v^2$). Pour les molécules diatomiques de notre atmosphère, on a :

$$v = \sqrt{\frac{5kT}{M}}$$

Dans le cas de l' O_2 , $M = 32$ g/mol, donc pour $T = 300$ K (la température moyenne de l'atmosphère est d'environ 15°C), on trouve une vitesse de environ 600 m/s donc pas suffisant pour la libération. En revanche, pour H_2 , on a $M = 2$ g/mol, on dépasse les 2 km/s. On est certes loin des 11 km/s requis, mais on n'a ici que la moyenne quadratique de la vitesse : certaines molécules de dihydrogène ont donc une vitesse suffisante pour quitter l'atmosphère terrestre.

Ceci explique alors la formation de l'atmosphère.

Conclusion : On a ici une première approche pour étudier le mouvement des astres en physique. Néanmoins, notre théorie est limitée et ne fonctionne pas dans certains cas. Par exemple, pour décrire les mouvements de Mercure, il faut passer par la relativité générale, car elle est trop proche du soleil.

Remarque :

-Pour tout ce qui est planète, Kepler, Ellipsoïdes etc, le sujet A d'Agreg de 2018 est plein d'applications et de démo qui peuvent servir pour une leçon !

-Ne pas hésiter à se renseigner sur le lien entre la gravitation/onde gravitationnelle et la relativité générale (questions potentielles!)

Questions/réponses:

- C'est grave si on ne peut pas considérer l'une des masses très grande devant l'autre ?

Si ce n'est pas le cas, on peut avoir des problèmes de référentiels non galiléens ou, si on insiste pour prendre un référentiel galiléen, on a un problème à deux corps.

- Vous pouvez écrire les équations locales du champ électrostatique ?

Equations de Maxwell sans champs B : $\text{rot}(\mathbf{E}) = 0$ et $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho/\epsilon_0$.

- Que peut-on déduire quoi de $\text{rot}(\mathbf{E})=0$? Si on poursuit l'analogie, c'est quoi l'énergie volumique de gravitation ?

Cela signifie, comme pour G, que E est à circulation conservative. Je dirais que c'est l'énergie de masse mais pas sûr du tout. Cela indique que c'est l'énergie et non la masse qui produit le champ gravitationnel. (cf

https://fr.wikipedia.org/wiki/Densit%C3%A9_d%27%C3%A9nergie partie relativité générale)

- Puisqu'une charge accélérée rayonne, que fait une masse accélérée ?

Elle émettrait des ondes gravitationnelles (on entre dans la théorie de la relativité générale :'().

- C'est quoi les ondes gravitationnelles ? Vous savez comment on détecte ces ondes ? Vous en savez plus ?

<http://www.cea.fr/multimedia/Documents/infographies/defis-du-cea-ondes-gravitationnelles.pdf>

- Sur Gauss, vous montrez qu'on peut réduire la masse à un point, et que ça ne dépend plus de la géométrie, c'est vrai ? Alors, si la densité dépend de r, on peut écrire Gauss ?

C'est la symétrie sphérique qui permet de réduire la masse à un point. Donc la densité peut dépendre de r, on peut toujours écrire Gauss en dehors de la sphère. Par contre ça ne marche plus si la densité dépend des angles.

- Le théorème de superposition est-il toujours valable avec des théorie plus élaborée ?

Il me semble que oui, à part peut être en relativité générale où de toute façon la gravitation n'est plus une force mais une courbure de l'espace temps.

- Sur ces trajectoires circulaires, vous connaissez les travaux de Le Verrier ?

C'est un mathématicien spécialisé en mécanique céleste a "découvert Neptune sans observer le ciel mais le bout de sa plume". En effet, la trajectoire d'Uranus ne respectait pas les lois de Newton même en tenant compte des 6 autres planètes connues en ce temps là. Il a postulé, avec Adams, l'existence d'une nouvelle planète, qu'ils étudient. Les calculs qu'ils avaient réalisés se sont avérés exacts à la découverte de Neptune.

- Citer une expérience pour mesurer G . Pourquoi est-ce une des constantes qu'on arrive pas à déterminer avec une bonne précision ?

La première historiquement est celle de Cavendish en 1798. Elle visait initialement à mesurer la masse de la Terre. Il utilisait un pendule de torsion constitué de deux masses de 700 grammes disposées en forme d'haltère et suspendues à un fil. Deux autres masses en plomb, d'environ 150 kg, sont approchées de manière à créer un couple de torsion qui fait tourner le pendule dans un plan horizontal. La mesure de l'angle de déviation de l'haltère est fonction de la force, donc de G , si les autres paramètres sont connus. La précision rétrospective de Cavendish sur G est de l'ordre de 1 %.

Dur à mesurer car la force que l'on cherche à mesurer est très faible par rapport au poids et que, par exemple, il est impossible de protéger une expérience contre les forces gravitationnelles perturbatrices.