Leçon n°21 : Induction électromagnétique

Niveau : CPGE

Prérequis : - Electrostatique et magnétostatique (Equation de Maxwell, énergie électromagnétique, ARQS, Force de Laplace, Forces de Lorentz)

- Electrocinétique des courants continus (Loi d'ohm locale)
- Mécanique Newtonienne

Bibliographie : - *CAP Prépa Physique, Vincent Renvoisé, PERSON.*

- *Physique : 1ère-2ème année MP, Vincent Demery, J'intègre Dunod.*
- *Electromagnétisme 2, J.Renault et JP Faroux, J'intègre Dunod.*
- *Fiche Constance (cours Guy Ropartz Rennes 1)*
- https://studylibfr.com/doc/2244548/deux-circuits-filiformes

0. Introduction

Le phénomène d'induction est le nom donné à l'apparition de courants, dits induits, dans un circuit électrique sous l'effet d'un champ magnétique. On limitera notre étude au deux cas extrêmes suivant :

- Si le circuit est fixe et indéformable, le champ magnétique étant temporellement variable, on parle d'induction de Neumann.
- Si le circuit est mobile ou déformable, le champ magnétique étant stationnaire, on parle d'induction de Lorentz.

I. Induction de Neumann

1. Lois de l'induction de Neumann

- Loi de Faraday :

Expression de la force électromotrice induite dans un circuit (carré filiforme immobile) : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

où Φ est le flux de $\vec{B}$ à travers une surface orientée reposant sur le circuit (convention générateur).

Rq : La loi de Faraday est énoncée pour un circuit fixe. Nous verrons qu'elle est en réalité valable même si le circuit est mobile, son mouvement étant une des causes de variation temporelle du flux magnétique Φ .

- Loi de Lenz :

Les conséquences des phénomènes d'induction s'opposent aux phénomènes qui leur ont donné naissance.

La loi de modération de Lenz est implicitement contenue dans le signe « moins » de la loi de Faraday. En toute rigueur, il faudrait aussi tenir compte du flux magnétique crée par la spire elle-même. Et pas uniquement le champ extérieur.

Démonstration Maxwell Faraday :

S'il existe un courant induit alors il y a déplacement de charge et il existe un champ. On a un champ magnétique **B**, on pose **E$_m$** le champ électrique associé. On a donc une force électromotrice qui s'écrit : $e = \oint(\overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl})$

On a e = -dphi/dt = - d/dt double intégrale sur S (B.dS)

On fait l'hypothèse du circuit fixe : $d\vec{B}(x,y,z,t) = \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}.dx + \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}.dy + \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}.dz + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}dt$

$\Leftrightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}.\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Or circuit fixe donc $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$

Ainsi $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

On sait que : $e = \oint(\overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl}) = \iint_S \left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dS}\right) = \iint_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}\right)$

D'après Stockes.

Ainsi $\iint_S \left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_m} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right).\overrightarrow{dS} = 0$ or quelque soit S cela doit être vrai car la surface s'appuie sur le circuit donc une seule solution donc $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_m} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Donc si $\vec{B}$ varie dans le temps il apparaît un champ $\overrightarrow{E_m}$.

Si en plus il existe des charges fixes alors il existe un champ électrostatique $\overrightarrow{E_s}$ tel que : $\overrightarrow{E_{tot}}$ = $\overrightarrow{E_m}$ + $\overrightarrow{E_s}$

On trouve : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ car $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_s} = \vec{0}$.

Si B est constant alors $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$ et : $\overrightarrow{E_{tot}}$ = $\overrightarrow{E_m}$ + $\overrightarrow{E_s}$ = $\vec{0}$ - $\overrightarrow{grad}\, V$

- Champ électromoteur et force électromotrice de Neumann :

Le phénomène d'induction se traitre dans le cadre de **l'ARQS magnétique**, où le courant de déplacement est négligé.

Les équations de Maxwell donnent : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Définition des potentiels ($\vec{A}$,V) :

L'équation de Maxwell-flux :

$$div\,\vec{B} = 0$$

et la propriété précisée ci-dessus permettent de définir un champ vectoriel $\vec{A}$ (appelé potentiel vecteur) tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$$

Si l'on introduit cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) \qquad soit \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on notera – V (V est appelé potentiel scalaire) tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\,(-V) = -\overrightarrow{grad}\,V \qquad soit \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Dans le cas du régime permanent dA/dt = 0, on retrouve l'expression classique E = -grad V

Le champ électromoteur est alors $\overrightarrow{E_m} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur magnétique défini par $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$. Sa circulation porte le nom de force électromotrice (FEM) de Neumann : $e = \oint(\overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl})$

Avec la force électromotrice (FEM) induite valant : $e_{A\to B} = \int_A^B -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.\overrightarrow{dl}$

Cette force électromotrice a les mêmes effets qu'un générateur : elle crée les courants induits en fournissant du travail aux charges mobiles le long d'un circuit fermé.

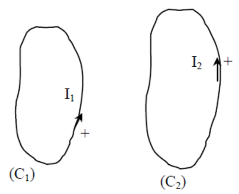
2. Inductance et auto-inductance

Biot - Savart

- Inductance propre d'un circuit filiforme fermé :

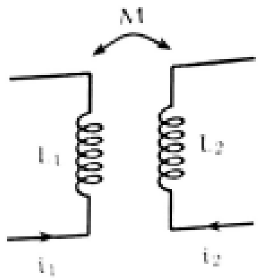
Le flux propre Φ_p, c'est-à-dire le flux du champ créé par le circuit à travers le circuit lui-même, s'exprime en fonction de l'inductance propre L (henry) du circuit : $\Phi_p = Li$

Soit deux circuits filiformes orientés C_1 et C_2. On note B_1 et B_2 les champs magnétiques créés respectivement par les courants i_1 et i_2. Chaque champ crée un flux magnétique à travers chaque circuit.



- Coefficient de mutuelle inductance :

Le flux $\Phi_{1\text{->}2}$ du champ magnétique créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 est proportionnel à l'intensité i_1, on note $M_{1\text{->}2}$ le coefficient de proportionnalité : $\Phi_{1\text{->}2} = M_{1\text{->}2}\, i_1$. De même, on introduit le coefficient $M_{2\text{->}1}$.
On montre, en généralisant un raisonnement sur des circuits élémentaires à partir de la loi de Biot et Savart (la démo n'est pas au prog), que $M_{1\text{->}2} = M_{2\text{->}1}$. On note ce coefficient M : c'est le coefficient de mutuelle inductance entre les deux circuits. On a les relations : $\begin{cases} \Phi_{1\to 2} = \mathrm{M}i_1 \\ \Phi_{2\to 1} = \mathrm{M}i_2 \end{cases}$
Il dépend uniquement de la géométrie de l'ensemble des deux circuits et s'exprime en henry. Son signe peut être quelconque : il dépend des orientations relatives des circuits.



3. Energie magnétique (Cas de deux circuits fixes)

La puissance électrique reçue par les deux circuits vaut :

$$P = u_1 I_1 + u_2 I_2$$

Soit :

$$P = \left(R_1 I_1^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2\right) + M I_1 \frac{dI_2}{dt}\right) + \left(R_2 I_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_2 I_2^2\right) + M I_2 \frac{dI_1}{dt}\right)$$

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_2 I_2^2\right) + M\frac{d}{dt}(I_1 I_2)$$

Finalement :

$$P = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2\right)$$

On reconnaît d'une part la puissance dissipée par effet Joule et on définit d'autre part :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Ce qui conduit à introduire l'énergie magnétique stockée par un ensemble de deux circuits fixes par les phénomènes d'auto-inductance et de mutuelle inductance : $U_m = ½ * L_1 . i_1^2 + ½ * L_2 . i_2^2 + M\, i_1 i_2$
Elle correspond à l'énergie qu'ont dû fournir les générateurs aux deux circuits pour créer le champ magnétique

4. Induction de Neumann dans les circuits non filiformes

Lorsque le conducteur est un bloc de métal plongé dans un champs magnétique temporellement variable, l'induction de Neumann se manifeste par des courants volumiques, appelés courants de Foucault.

II. Induction de Lorentz = Induction électromagnétique pour un circuit mobile dans un champ permanent

L'effet du champ magnétique sur le courant en mouvement équivaut à celui d'un générateur caractérisé par une FEM dite de Lorentz.

1. Changement de référentiel en électromagnétisme

Considérons une charge ponctuelle q en mouvement dans un laboratoire.

Démonstration :

- Le système 0 est un porteur de charge q, situé au point M, libre de se déplacer dans le circuit.
- Le référentiel 1 est celui du laboratoire, dans lequel une distribution *fixe et indéformable* de charges et de courants crée dans l'espace environnant un champ électromagnétique. On note $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ la valeur de ce champ au point M dans le référentiel 1.
- Le référentiel 2 est en translation par rapport à 1. Il est centré sur le point M du circuit mobile par rapport au référentiel 1. On note $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ le champ électromagnétique en M dans le référentiel 2.

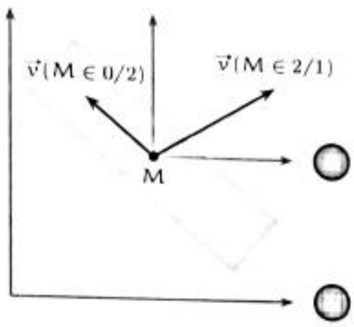


Fig. 14.3. Changement de référentiel. Le bloc de couleur est le conducteur en mouvement par rapport au référentiel 1. On note 2 le référentiel centré en M en translation par rapport à 1.

Traduisons l'invariance de la force de Lorentz généralisée ressentie par le porteur q situé en M :

$$q\left[\vec{E}_1 + \vec{v}(M \in 0/1) \wedge \vec{B}_1\right] = q\left[\vec{E}_2 + \vec{v}(M \in 0/2) \wedge \vec{B}_2\right]. \qquad (14.6)$$

Le référentiel 2 étant en translation par rapport à 1, la loi de composition newtonienne des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}(M \in 0/1) = \vec{v}(M \in 0/2) + \vec{v}(M \in 2/1). \qquad (14.7)$$

On combine les expressions (14.6) et (14.7) :

$$\vec{E}_1 + \vec{v}(M \in 2/1) \wedge \vec{B}_1 + \vec{v}(M \in 0/2) \wedge \vec{B}_1 = \vec{E}_2 + \vec{v}(M \in 0/2) \wedge \vec{B}_2. \qquad (14.8)$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la vitesse du porteur de charge q par rapport au circuit, c'est-à-dire pour tout $\vec{v}(M \in 0/2)$. Par conséquent, les coefficients de $\vec{v}(M \in 0/2)$ sont égaux, donc $\vec{B}_2 = \vec{B}_1$. Ainsi, l'expression (14.8) se résume à $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}(M \in 2/1) \wedge \vec{B}_1$. Nous retrouvons les relations (14.5). La faille de ce raisonnement[2] réside dans le fait qu'il conduit à croire que la relation (14.5) est *toujours* valable alors que ce n'est le cas que dans l'AEQS magnétique.

Théorème : Transformation galiléenne du champ électromagnétique dans l'ARQS magnétique.
D'après l'égalité des forces de Lorentz dans les différents référentiels, on en déduit l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans R en fonction du champ $(\vec{E}_s, \vec{B}_s)$ dans R_s et de la vitesse relative $\vec{v}$ de R par rapport à R_s au point considéré : $\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_s \\ \vec{E} = \vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B}_s \end{cases}$

2. Champ induit dans un circuit par son déplacement

Le théorème montre que le champ magnétique n'est pas modifié par changement de référentiel. Désormais, on notera simplement $\vec{B}$ sa valeur dans les deux réf. Il reste simplement $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B}_s$ dans le référentiel du conducteur en mouvement.

La composante du champ dans le circuit qui est induite par son déplacement, appelée aussi champ électromoteur de Lorentz, vaut $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_s$
Ce champ a les mêmes effets qu'un champ électrique et s'ajoute aux champs électriques déjà existants.

- Force électromotrice induite :

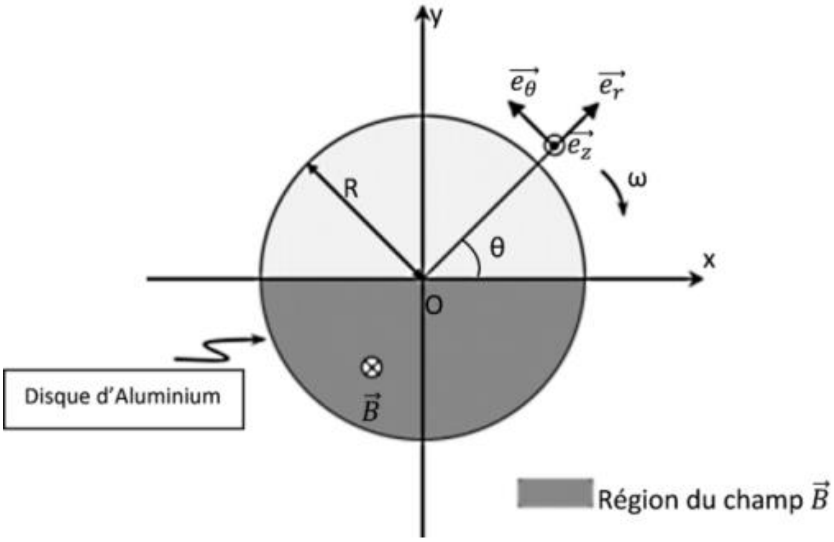
Dans un circuit filiforme rigide et mobile dans R_s : obtenue en intégrant l'équation précédente :

$$e_{A\to B} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl} \, .$$

Alors on a : $V_A - V_B = R_{AB}.I_{AB} - e_{A\text{->}B}$ et pour tout circuit $RI = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$

Théorème : Généralité de la loi de Faraday (admis)
On peut montrer que, la loi de Faraday est généralisable : e = -dΦ/dt
où *d*Φ représente la variation du flux du champ magnétique à travers le circuit lors du déplacement du circuit pendant l'intervalle de temps dt.

3. Induction de Lorentz dans un circuit non filiforme



Envisageons une roue métallique pivotant autour de l'axe (O, $\mathbf{e}_z$) à la vitesse angulaire ω. Supposons qu'une zone de cette roue soit baignée dans un champs magnétique **B** = B.$\mathbf{e}_z$, indépendant du temps. Des courants de Foucaults vont se développer dans la roue (induction de Lorentz). Localement, un point de la roue possède une vitesse **v** = ωr $\mathbf{e}_\theta$. Les courants de Foucault, dans le référentiel de la roue, sont donnés par la loi d'Ohm locale : **j** = ɣ $\mathbf{E}_m$ = ɣ. ωrB $\mathbf{e}_r$.
L'élément dτ parcouru par ce courant est soumis à une action de Laplace :
$d\mathbf{F}_{Lap} = \mathbf{j}\, d\tau \wedge \mathbf{B} = \gamma.\ \omega r B\, \mathbf{e}_r\, d\tau \wedge B.\mathbf{e}_z \Rightarrow d\mathbf{F}_{Lap}/d\tau = -\gamma.\ \omega r B^2\, \mathbf{e}_\theta$.

Cette force par unité de volume est dirigée selon – ω. $\mathbf{e}_\theta$ et a donc tendance à freiner la roue, conformément à la loi de Lenz. Elle est mise à profit dans les ralentisseurs électromagnétiques de camion et de bus pour trois raisons :

- C'est une force volumique, donc l'échauffement au freinage est mieux réparti sur les freins conventionnels où il se fait unique par frottement entre les plaquettes et le disque.
- Il n'y a pas d'usure mécanique.

- Si jamais la roue bloque intempestivement, le freinage cesse automatiquement (il est proportionnel à ω) et la roue se débloque. Il n'y a donc aucun risque de dérapage.

III. Application

1. Exemple de rails de Laplace : principe des générateurs

Expérience : Rails de Laplace

Il s'agit de deux rails horizontaux en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, noté [CD] sur la figure 14,4 refermant le circuit. On note R la résistance du circuit. L'orientation du circuit est fixée arbitrairement.

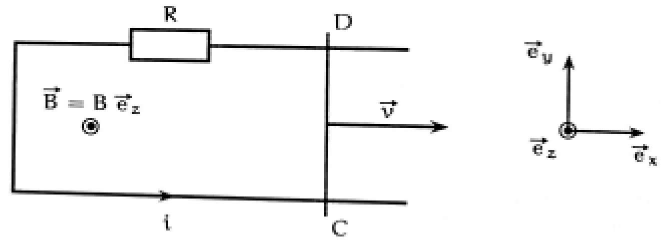


Fig. 14.4. Rails de Laplace en vue de dessus. Le dispositif baigne dans un champ magnétique uniforme créé par un aimant. La barre [CD], mobile, est mise en mouvement par un opérateur. Un galvanomètre, non représenté sur le schéma, mesure le courant i induit. L'orientation de l'intensité est arbitraire.

Un opérateur anime la barre [CD] d'une vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e_x}$, qui devient ainsi une portion de circuit électrique en mouvement dans un champs magnétique extérieur indépendant du temps : c'est un cas d'induction de Lorentz.

En chaque point M de la barre [CD] règne un champ électromoteur $\mathbf{E_m} = \mathbf{v}(M,t) \wedge \mathbf{B}(M) = v\,\mathbf{e_x} \wedge B\,\mathbf{e_z} = -vB\,\mathbf{e_y}$. Le champ électromoteur est nul ailleurs. La FEM induite dans le circuit est obtenue en calculant la circulation de $\mathbf{E_m}$ le long du circuit.

Ici nous choisissions arbitrairement de calculer la circulation dans le sens choisi pour i :

e = intégrale fermé sur le circuit ($\mathbf{E_m}.\mathbf{dl}$) = intégrale de C à D ($- vB\,\mathbf{e_y}.dy\,\mathbf{e_y}$) = intégrale de 0 à l ($- vB\,dy$) = $-vBl$.

Le circuit électrique équivalent est donné sur la figure 14,5. Il conduit à l'équation électrique suivante : $i = e/R = -vBl/R$

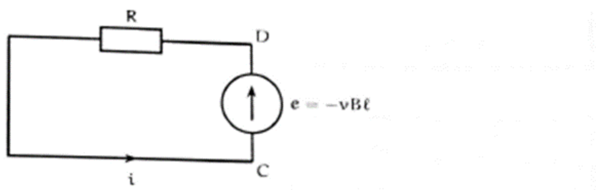


Fig. 14.5. Schéma électrique équivalent à la situation de la figure 14.4. La FEM induite est orientée selon le sens choisi pour calculer l'intégrale de la circulation du champ électromoteur.

La barre [CD] est parcourue par un courant électrique alors qu'elle est plongée dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à des actions de Laplace.

La résultante des actions de Laplace sur la barre [CD] est donc :

$\mathbf{F_{Lap}}$ = intégrale de C à D ($i\mathbf{dl} \wedge \mathbf{B}$) = intégrale de y=0 à l ($idy\,\mathbf{e_y} \wedge B\,\mathbf{e_z}$) = intégrale de y=0 à l ($-vBl/R*dy*B(+\mathbf{e_x})$) = $-vB^2l^2/R\,\mathbf{e_x}$

La force de Laplace tend à ralentir la barre quel que soit le signe de v. Ce résultat peut être prévu par la loi de Lenz. En effet, l'apparition d'une force de freinage négative est bien un effet modérateur tendant à s'opposer à la mise en mouvement de la barre.

Calculons la puissance mécanique fournie par la force de Laplace à la barre, dans le réf. des rails :
$P_{Lap} = \mathbf{F_{Lap}}.\mathbf{v} = -vB^2l^2/R\ \mathbf{e_x}\ .\ v\ \mathbf{e_x} = -\ v^2B^2l^2/R$
Par ailleurs, calculons la puissance électrique P_e fournie par la FEM induite au reste du circuit, cette FEM est orientée en convention générateur, donc :
$P_e = e*i = e^2/R = v^2B^2l^2/R$
Nous constatons que $P_{Lap} = -\ P_e$. Ce résultat est général pour l'induction de Lorentz.
Rq : On dit que la convention de puissance électromagnétique a un rendement de 100%. Cela est mis à profit dans les transducteurs électromécaniques (moteurs électriques et générateurs).
On parle de couplage électromécanique parfait.

2. La roue de Barlow, ancêtre des générateurs et moteurs électriques

On envisage un moteur électrique constitué d'un disque métallique de rayon a, libre de tourner autour de son axe horizontal Oz avec un moment d'inertie J et plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire B=-Buz, avec B>0. Ce disque est fermé par un fil électrique issu de son centre O et par un contact avec un bain de mercure en un point A sur un générateur de fém E constante et une résistance R via un interrupteur K. On néglige la résistance du disque et celle du générateur. On néglige l'inductance propre du circuit.
On note i l'intensité du courant et ω la vitesse angulaire de rotation du moteur. Le courant étant nul et la roue au repos, on ferme l'interrupteur K.

Le disque, parcouru par un courant imposé par le générateur, se met en mouvement (dû aux forces de Laplace dans un champ magnétique) ; ce mouvement va créer une fém d'induction (cas de Lorentz) dont les effets vont s'opposer à la cause de ce mouvement.

Il y a couplage entre i(t) et ω(t) : la roue de Barlow constitue un exemple de « transducteur électromécanique », c'est-à-dire de système susceptible de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique et réciproquement.
Dans un 1er temps (voir à la fin de ce paragraphe), on admet que les forces de Laplace subies par le disque sont équivalentes à celles que subirait un conducteur filiforme confondu avec le rayon OA et parcouru par un courant d'intensité i.
On va établir l'équation différentielle du problème en supposant que la roue est soumise à un couple de frottements de la forme -fω.
Suite diapo

X. Conclusion

« L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes qui dépendent du point de vue de l'observateur. »

Nous avons étudié deux cas extrêmes du phénomène de l'induction : l'induction de Neumann et de Lorentz. Ces deux phénomènes ont des applications dans les appareils utilisés dans la vie de tous les jours comme les plaques à induction avec les courants de foucault ; ils sont utilisés dans les moteurs électriques et les générateurs ou au contraire comme frein comme pour ceux des bus et des camions.