

## CHAPITRE 3 :

### RAYONNEMENT D'UN DIPOLE OSCILLANT.

Après avoir étudié la propagation des ondes dans le vide, on se propose dans ce chapitre de s'intéresser à l'émission des ondes électromagnétiques. Ces ondes sont généralement produites par des charges accélérées. Les calculs directs des champs électrique et magnétique sont extrêmement complexes. On traite dans ce chapitre un cas particulier « simple », le dipôle électrique oscillant, mais très important car, d'une part, il correspond au mode de rayonnement principal des atomes ou molécules et d'autre part, il permet d'interpréter le rayonnement d'ondes hertziennes par des antennes métalliques comme la superposition des champs produits par un ensemble de dipôles oscillants.

On débute ce chapitre par l'étude d'une des solutions des équations du potentiel électromagnétique - les potentiels retardés de Lienard-Wiechert - ce qui nous permettra de présenter le domaine de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). On se focalisera dans un second temps sur l'étude du dipôle oscillant : calculs du potentiel et du champ électromagnétique ainsi que de la puissance rayonnée. Les résultats obtenus seront finalement appliqués à la diffusion de la lumière par l'atmosphère.

#### I SOLUTIONS DES POTENTIELS RETARDES – INTRODUCTION DE L'ARQS.

##### I.1 Les potentiels retardés dits de Lienard – Wiechert.

En statique, les potentiels scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$ , dont l'existence est assurée par les relations locales  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  et  $\text{div } \vec{B} = 0$ , vérifient les équations de Poisson  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$  (dans

le cadre de la jauge de Coulomb  $\text{div } \vec{A} = 0$ ).  $V$  et  $\vec{A}$  sont alors liés aux distributions de charges et

de courants respectivement par : 
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau.$$

En régime variable, les équations locales du champ ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) changent et ces solutions ne sont plus valides. Dans le premier chapitre consacré aux équations de Maxwell, nous avons établi les

nouvelles équations des potentiels dans le cadre de la jauge de Lorentz  $\text{div } \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  :

$$\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Il s'agit ici de construire un couple  $(V, \vec{A})$  solution de ces équations en utilisant les expressions issues de la statique. On limite l'étude à celle du potentiel scalaire  $V$ .

### 1.1.1 Potentiel créé par une charge ponctuelle.

Comme en statique, les équations sont linéaires et on pourra donc appliquer le principe de superposition. On détermine donc dans un premier temps le potentiel créé par une charge ponctuelle  $q(t)$ . Ce problème se traite en coordonnées sphériques et on place l'origine  $O$  du repère à la position de la charge. Le système présente une symétrie sphérique, la distribution de charge, et par suite le potentiel  $V$ , ne dépendent que de la coordonnée  $r$ .

A l'exclusion de  $O$ ,  $\rho = 0$  en tout point, l'équation vérifiée par  $V$  se réduit à  $\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ .

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que pour des ondes sphériques, la solution générale est de la forme  $\psi(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)$ . La fonction  $f$  correspond à une onde divergente, qui quitte la charge en  $O$ , alors que le second terme  $g$  correspond à une onde se dirigeant vers  $O$ . Cette onde convergente vers  $O$  n'a pas de sens physique dans un milieu illimité, on l'exclut et ne conserve que  $V(M, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ .

$\frac{r}{c}$  correspond à l'intervalle de temps que met le signal pour parcourir la distance  $r$  à la vitesse  $c$ , il induit un retard à la perception du signal. Si  $M$  est très proche de la charge  $q$ , on peut négliger ce délai, la forme de  $V(M, t)$  devient  $V(M, t) = \frac{1}{r} f(t)$ . L'équation vérifiée par  $V$  devient  $\Delta V = 0$

(car  $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$ ) comme en statique. On peut donc prendre comme solution une forme

similaire de la statique :  $V(M, t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r}$  qui correspond bien à la situation où le point  $M$  voit

instantanément les évolutions de  $q(t)$ .

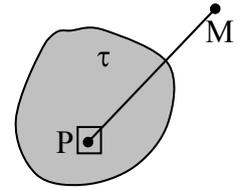
De  $V(M, t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{r} f(t)$ , on déduit  $f(t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}$  soit  $f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\left(t - \frac{r}{c}\right)$  puis

$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} q\left(t - \frac{r}{c}\right)$ . Le terme  $q\left(t - \frac{r}{c}\right)$  traduit un retard à la propagation : le point  $M$  ne voit

pas, à l'instant  $t$ , la charge en cet instant, i.e.  $q(t)$ , mais celle qui existait en  $O$  à l'instant  $t - \frac{r}{c}$ . Cet instant, dit retardé, est fonction de la distance  $r$  entre le point source (ici  $O$ ) et le point  $M$ ,  $\frac{r}{c}$  représente le temps nécessaire à la propagation de l'information du point  $O$  au point  $M$  à la vitesse  $c$ .

### 1.1.2 La solution générale des potentiels retardés

On considère maintenant une distribution volumique de charge d'extension limitée, en tout instant, à un volume  $\tau$  dans lequel la densité volumique de charge  $\rho(P, t)$  est fonction de l'espace et du temps. Pour déterminer le potentiel créé en  $M$  par cette distribution, on décompose la distribution en élément de volume  $d\tau_P$  entourant un point  $P$  qui porte la charge  $dq_P(t) = \rho(P, t) d\tau_P$ . Cet élément crée



en  $M$  le potentiel  $dV(M, t) = \frac{\rho\left(t - \frac{PM}{c}\right) d\tau_P}{4\pi\epsilon_0 PM}$  car la distance séparant la source en  $P$  et le point  $M$

est ici  $PM = \|\vec{PM}\|$ , la durée nécessaire pour que l'information aille de  $P$  en  $M$  est  $\frac{PM}{c}$  et l'instant retardé devient  $\left(t - \frac{PM}{c}\right)$ .

Le potentiel total s'obtient en sommant les différentes contributions sur le volume  $\tau$  englobant

toutes les charges :  $V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) d\tau}{PM}$ . L'instant auquel il faut considérer la

densité de charge  $\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)$  dépend de la position de  $P$  dans le volume  $\tau$ , il en résulte une très grande complexité dans le calcul du potentiel.

De même, on peut montrer que le potentiel vecteur  $\vec{A}(M, t)$  créé par une distribution volumique de

courant dépendant du temps s'écrit :  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) d\tau}{PM}$ .

Les deux relations que nous venons de donner pour  $V$  et  $\vec{A}$  portent le nom de potentiels retardés ou potentiels de Lienard – Wiechert. Ils satisfont (calcul difficile) la condition de jauge de Lorentz.

## 1.2 Approximation des régimes quasi-stationnaires ARQS (ou quasi-permanent).

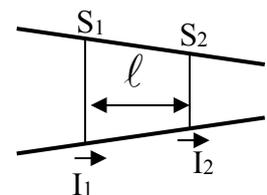
### 1.2.1 Problématique

Les équations locales des régimes variables montrent qu'on ne peut plus continuer à raisonner comme en régime permanent. Par exemple, l'équation de conservation de la charge  $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  indique que le flux de la densité de courant  $\vec{j}$  n'est pas conservatif dans le cas général ( $\text{div } \vec{j} \neq 0$ ). Il en résulte en particulier la loi des nœuds n'est plus applicable en régime variable (voir annexe 1). Autre exemple : lors de l'étude de l'induction, on suppose que les seules sources de champ magnétique sont les courants ( $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ), mais dans le cas des régimes variables, le courant de déplacement peut également contribuer à un champ magnétique. Par conséquent, c'est l'ensemble des résultats (fem et courant induits) qu'il faudrait remettre en cause car toutes les méthodes de calcul nécessitent la détermination du champ magnétique  $\vec{B}$ .

Toutefois, lors de l'étude des circuits RLC par exemple, on continue à utiliser la loi des nœuds. On se place en fait lors de ces études dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), i.e. on admet que la dépendance des grandeurs vis à vis du temps est suffisamment lente pour pouvoir raisonner comme si le régime était permanent.

### 1.2.2 Conditions de l'approximation.

Reprenons l'exemple d'un conducteur filiforme et considérons deux sections séparées d'une distance  $\ell$ . En régime permanent,  $\text{div } \vec{j} = 0$ , les courants qui traversent les deux sections  $S_1$  et  $S_2$  sont égaux ( $I_1 = I_2$ ).



En régime variable, le signal peut prendre un certain temps pour se propager de  $S_1$  vers  $S_2$ , ce qui conduirait à  $I_2(t) \neq I_1(t)$ . Si on suppose que le signal se propage à la vitesse  $c$ , il met  $\Delta t = \frac{\ell}{c}$  pour aller de  $S_1$  à  $S_2$  et par suite  $I_2(t) = I_1(t - \frac{\ell}{c})$ , le courant en  $S_2$  à l'instant  $t$  est celui qui a traversé  $S_1$  à l'instant  $(t - \frac{\ell}{c})$ .

Raisonnement comme en régime permanent revient à écrire  $I_2(t) \approx I_1(t)$  donc à supposer que les retards à la propagation sont négligeables devant les temps caractéristiques de l'évolution. Pour un signal périodique, il faut que les grandeurs évoluent lentement de sorte que la période  $T$  soit grande

$$\text{devant le retard } \Delta t = \frac{\ell}{c}. \quad \frac{\ell}{c} \ll T \quad \Leftrightarrow \quad \ell \ll c T \quad \text{soit} \quad \ell \ll \lambda$$

L'ARQS sera donc valide si la longueur  $\ell$  de l'objet (circuit...) est faible devant  $\frac{c}{N} = \lambda$ .

Le tableau ci-contre montre que, même à un MHz, on peut négliger les retards à la propagation tant que  $\ell \ll 30 \text{ m}$ .

N	C/N (m)
50 Hz	$6 \cdot 10^6$
1 MHz	30

### 1.2.3 Champ et potentiel électromagnétiques.

Si on néglige le retard à la propagation (i.e.  $\frac{PM}{c}$ ) dans l'expression des potentiels retardés, les potentiels  $V(M,t)$  et  $\vec{A}(M,t)$  deviennent :

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(P,t)}{PM} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}(P,t)}{PM} d\tau.$$

On retrouve des expressions proches de celles établies en régime permanent : les potentiels suivent instantanément l'évolution des sources.

Négligé le retard à la propagation revient également à supposer que la vitesse de propagation devient « infinie »  $\left(\frac{PM}{c} \rightarrow 0\right)$ . Les équations des potentiels  $\Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$  avec  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$  se simplifient alors :  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ . On

retrouve les équations de Poisson "instantanées" établies en régime permanent en accord avec les expressions de  $V$  et de  $\vec{A}$  données ci-dessus.

L'expression du champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  est ensuite déduite de celle de  $(\vec{A}, V)$  grâce aux relations  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  et  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . La relation qui lie  $\vec{B}$  à  $\vec{A}$  est la même qu'en régime stationnaire car elle ne

fait pas intervenir la dérivation par rapport au temps. Le champ magnétique  $\vec{B}$  instantané est donc, comme en régime permanent, donné par la loi de Biot et Savart  $\vec{B}(M,t) = \iiint_{\tau} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P,t) d\tau \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$ .

En revanche, le champ électrique  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  ne s'identifie pas, même dans l'ARQS, à un champ de Coulomb instantané.

#### 1.2.4 L'ARQS dans les circuits électriques.

Considérons un simple fil conducteur parcouru par un courant dont la densité volumique est  $\vec{j}$ .

L'équation de Maxwell – Ampère s'écrit  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Comme on l'a

déjà vu, en régime variable  $\text{div} \vec{j} \neq 0$ , le flux de  $\vec{j}$  n'est pas conservatif, il en suit, en particulier, que la loi des nœuds ne peut plus être écrite.

Par contre, si on se place dans le cadre de l'ARQS, i.e. si on admet que la vitesse de propagation  $c$

est très grande, on peut alors négliger  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  devant  $\mu_0 \vec{j}$  (i. e. négliger le courant de déplacement

devant le courant de conduction), l'équation de Maxwell – Ampère devient  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , par suite

$\text{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = 0$ . Le flux de  $\vec{j}$  est alors conservatif.

Ainsi, lorsqu'on étudie un circuit en électricité par exemple, les dimensions et fréquence sont telles que l'on se place dans le cadre de l'ARQS. La loi des nœuds est alors applicable...

De même, lorsqu'on étudie les phénomènes d'induction, on considère implicitement que le champ magnétique se détermine en utilisant la magnétostatique, i.e. nous avons négligé le terme

$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_D$  devant le courant de conduction  $\vec{j}$  bien qu'il soit également source de champ

magnétique dans le cas général des régimes variables. Dans le domaine de fréquence utilisé (typiquement qq kHz), on admet qu'on se situe dans le cadre de l'ARQS.

Pour autant, on ne doit pas stipuler que l'équation de Maxwell – Ampère ne se simplifie systématiquement à  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  dans l'ARQS. En effet, dans un condensateur par exemple, on ne

peut pas écrire  $\|\vec{j}\| \gg \|\vec{j}_D\|$  entre les armatures car  $\vec{j}$  y est nul !

## II POTENTIEL PRODUIT PAR UN DIPOLE OSCILLANT.

En électrostatique, un dipôle est modélisé par un doublet de charges  $+q$  et  $-q$  placées respectivement en  $P_+$  et  $P_-$ . Ce dipôle est caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p} = q \overrightarrow{P_- P_+}$ . De tels moments peuvent exister spontanément dans la matière ou être créés par un champ électrique appliqué au milieu qui sépare les barycentres des charges positives et négatives. L'approximation dipolaire d'une distribution neutre (atome, molécule...) de charges permet d'écrire le moment  $\vec{p}$  de

la distribution sous la forme  $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$  où chaque charge  $q_i$  est localisée en  $P_i$  et  $O$  est une origine arbitraire (voir annexe 2).

En régime variable, les charges se déplacent et le moment dipolaire devient fonction du temps  $\vec{p}(t)$ . Deux modèles distincts peuvent être utilisés pour écrire l'expression de  $\vec{p}(t)$ . Le modèle du dipôle oscillant le plus fréquent consiste à considérer des charges données séparées d'une distance variable. Cependant, on rencontre parfois pour exprimer  $\vec{p}(t)$  un modèle dans lequel des charges variables  $q(t)$  sont séparées d'une distance fixe.

L'étude consiste dans un premier temps à exprimer le potentiel vecteur créé par ce dipôle variable puis de déterminer le potentiel scalaire à partir de la jauge de Lorentz.

## II.1 Expression du potentiel vecteur.

Considérons un modèle atomique dans lequel la charge électronique, constituée de  $Z$  électrons, est distribuée autour du noyau ponctuel de sorte qu'en l'absence de champ le barycentre des charges négatives coïncide avec le noyau. Le moment dipolaire de la distribution  $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$  est alors nul. On note  $R$  le rayon de l'atome.

On admet que le noyau  $P_+$ , nettement plus massif que les électrons, reste fixe et on choisit de positionner l'origine  $O$  en ce point. La somme  $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$  porte ainsi uniquement sur les  $Z$  électrons de charge ( $q_i = -e$ ). Comme on l'a dit précédemment, en présence d'un champ variable, les électrons oscillent autour du noyau. Il résulte de ces mouvements un moment dipolaire non nul mais également une densité de courant variable.

Pour donner des ordres de grandeur, supposons que les électrons se déplacent au maximum d'une distance égale à  $R$ . La distance maximale entre un électron et le noyau, que nous définirons comme la dimension caractéristique  $d$  de la distribution de charges, est dans cette hypothèse de l'ordre  $2R$  :  $d \approx 2R$ .

Pour une distribution volumique de courant, le potentiel vecteur  $\vec{A}(M, t)$  créé en tout point  $M$  de

l'espace est donné par la relation de Lienard – Wiechert :  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) d\tau}{PM}$ . Ici,

nous considérons une distribution discrète dans laquelle seuls les électrons sont mobiles. Partant des

équivalences entre distribution volumique et distribution discrète utilisées habituellement, on écrit que  $\vec{j}(\mathbf{P})d\tau = \rho_m(\mathbf{P})\vec{v}(\mathbf{P})d\tau = dq(\mathbf{P})\vec{v}(\mathbf{P})$  devient, pour une distribution de charges mobiles ponctuelles,  $q_i\vec{v}_i$  où  $\vec{v}_i$  est la vitesse de la particule  $q_i$ . L'expression du potentiel vecteur devient

$$\text{alors } \vec{A}(\mathbf{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i \left( t - \frac{P_i M}{c} \right)}{P_i M}.$$

La complexité du calcul tient d'une part dans la distance  $P_i M$  variable au dénominateur mais également dans la prise en compte de l'instant retardé  $t - \frac{P_i M}{c}$  qui dépend de chaque charge mobile. On est donc amené à effectuer des approximations simplificatrices.

On admet que la distance d'observation  $r = OM = \|\vec{OM}\|$  est grande devant la distance qui sépare chaque électron du noyau. Autrement dit, pour tout électron  $q_i$  en  $P_i$ ,  $P_i M \approx r$  en tout instant

$$(\vec{P_i M} = \vec{P_i O} + \vec{OM} \Rightarrow P_i M = \|\vec{P_i M}\| = r \sqrt{1 + \frac{OP_i^2}{r^2} + 2 \frac{\vec{P_i O} \cdot \vec{OM}}{r^2}}, P_i M \approx r \text{ si } OP_i \ll r).$$

Nous avons précédemment supposé  $OP_{i_{\max}} = 2R = d$ . La condition  $OP_i \ll r$  en tout  $P$  peut donc être écrite  $d \ll r$ . Cette condition, qui s'apparente à l'hypothèse d'étude du dipôle électrostatique, est parfois appelée approximation dipolaire.

A ce stade, on peut remplacer tous les  $P_i M$  par  $r$  au dénominateur dans l'expression de  $\vec{A}(\mathbf{M}, t)$ .

Toutefois cette condition ne permet pas de remplacer  $P_i M$  par  $r$  dans  $\vec{v}_i \left( t - \frac{P_i M}{c} \right)$  car, surtout si

les fluctuations sont rapides, le point  $M$  à l'instant  $t$  ne perçoit pas le déplacement de chaque électron aux mêmes instants : le signal en  $M$  a été émis par les différentes charges  $q_i$  à des instants

« retardés »  $t - \frac{P_i M}{c}$  qui dépendent de la position de  $q_i$ .

Pour que l'on puisse confondre  $\vec{v}_i \left( t - \frac{P_i M}{c} \right)$  et  $\vec{v}_i \left( t - \frac{r}{c} \right)$ , il faut que le décalage temporel

$\left| \frac{P_i M}{c} - \frac{r}{c} \right| = \frac{|P_i M - r|}{c}$  soit faible devant le temps caractéristique d'évolution de la distribution

électronique. Pour des oscillations de période  $T$ , il faut donc  $\frac{|P_i M - r|}{c} \ll T$  pour tout point  $P_i$ .

$|P_i M - r|$  étant majoré par  $OP_{i_{\max}} = 2R = d$ , la condition devient  $\frac{d}{c} \ll T$  soit  $d \ll cT$  ou encore

$d \ll \lambda$ .

Les électrons parcourent une distance de l'ordre de grandeur de  $d$  durant la période  $T$ , la vitesse moyenne des particules est alors  $v_m = \frac{d}{T}$ , la condition  $d \ll cT$  s'écrit également  $\frac{d}{T} \ll c$  soit  $v_m \ll c$ . La vitesse des électrons doit rester très inférieure à celle de la lumière. L'approximation  $d \ll cT$  (ou  $d \ll \lambda$ ), qui est équivalente à  $v_m \ll c$ , est souvent appelé approximation non relativiste.

Dans ces deux conditions,  $\vec{A}(M, t)$  devient  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r}$ .  $\vec{v}_i \left( t - \frac{r}{c} \right)$  est la vitesse

de la particule  $q_i$  en  $P_i$  :  $\vec{v}_i \left( t - \frac{r}{c} \right) = \frac{d\vec{OP}_i \left( t - \frac{r}{c} \right)}{dt}$ . Il suit  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \frac{d\vec{OP}_i \left( t - \frac{r}{c} \right)}{dt}$ .

L'instant retardé  $\left( t - \frac{r}{c} \right)$  étant le même pour tous les électrons, on peut permuter la somme et la

dérivée temporelle :  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \left( \sum_i q_i \vec{OP}_i \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$ . On retrouve ici l'expression du

moment dipolaire de la distribution de charge et on obtient finalement  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{dt}$ .

En conclusion, le potentiel vecteur en  $M$ , à l'instant  $t$ , créé par un dipôle  $\vec{p}(t)$  variable à une échelle de temps caractéristique  $T$ , d'extension spatiale de l'ordre de  $d$  et situé au voisinage d'un point  $O$

peut être écrit :  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{dt} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{r} \vec{\dot{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)$  si les deux conditions suivantes sont

vérifiées :

- Approximation dipolaire :  $d \ll r = OM$
- Approximation non relativiste :  $d \ll cT = \lambda$  ;

Pour l'ensemble des calculs suivants, on choisit un système de coordonnées sphériques d'axe  $(O, z)$  parallèle au dipôle oscillant :  $\vec{p}(t) = p(t) \vec{e}_z$ .

Comme  $\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$ , les coordonnées sphériques de  $\vec{A}(M, t)$  sont alors :

$$A_r(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad A_\theta(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad A_\phi(M, t) = 0$$

## II.2 Calcul du potentiel scalaire.

Le potentiel scalaire  $V(M, t)$  s'obtient en utilisant la jauge de Lorentz  $\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  ou encore  $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ .

La première étape consiste à calculer  $\text{div } \vec{A}$  à partir de l'expression de la divergence en

coordonnées sphériques  $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[ \frac{\partial (r^2 \sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r \sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial \phi} \right]$ .

Dans tous les prochains calculs, nous devons exprimer  $\frac{\partial p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial r}$  et  $\frac{\partial \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial r}$  :

$$\frac{\partial p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial r} = \frac{\partial p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial\left(t - \frac{r}{c}\right)} \cdot \frac{\partial\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \text{ car } \frac{\partial p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial\left(t - \frac{r}{c}\right)} = \frac{\partial p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial\left(t - \frac{r}{c}\right)} = \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

De même,  $\frac{\partial \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ .

A partir de l'expression générale de la divergence, sachant que  $A_\phi = 0$  :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial \left( r \cos\theta \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} r \cos\theta \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cos\theta \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial \left( \frac{\sin^2\theta}{r} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{r} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Soit  $\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \left( -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{r} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)$  et

finalement  $\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ .

A partir de la jauge de Lorentz, on déduit  $\frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div} \vec{A}$  soit

$$\frac{\partial V}{\partial t} = c \frac{\mu_0 \cos \theta}{4 \pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + c^2 \frac{\mu_0 \cos \theta}{4 \pi r^2} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Avec de plus  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ , on obtient, après intégration par rapport au temps :

$$V(M, t) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\cos \theta}{r c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} p \left( t - \frac{r}{c} \right), \text{ la constante d'intégration est nulle}$$

car on exclut la solution stationnaire qui ne participe pas à la propagation du signal.

On peut remarquer que l'on retrouve le potentiel  $V(M) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$  du dipôle électrostatique

auquel s'ajoute, en régime variable, un terme en  $1/r$  proportionnel à la variation de  $p(t)$ .

### III CHAMP ELECTROMAGNETIQUE PRODUIT PAR UN DIPOLE OSCILLANT.

#### III.1 Calcul du champ magnétique.

Le champ magnétique est calculé via  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  dont l'expression en coordonnées sphériques est :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial (r \sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + r \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \theta A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ + r \sin \theta \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (A_\theta)}{\partial \varphi} \right)$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \quad \text{et} \quad B_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right).$$

La composante  $B_r$  est nulle car  $A_\varphi$  est nulle et  $A_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ . La composante  $B_\theta$  est nulle parce que  $A_\varphi$  est nulle et  $A_r$  ne dépend pas de  $\varphi$ .

$$\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\mu_0}{4 \pi} \sin \theta \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) = -\frac{\mu_0}{4 \pi} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) = -\frac{\mu_0}{4 \pi} \sin \theta \left( -\frac{1}{c} \right) \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\text{Soit } \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4 \pi c} \sin \theta \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\frac{\partial (A_r)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 \cos \theta}{4 \pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4 \pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Il en résulte que  $B_\varphi = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4 \pi c} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mu_0 \sin \theta}{4 \pi r^2} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right).$

### III.2 Calcul du champ électrique.

Le champ électrique peut être calculé via la relation de Maxwell-Ampère ou à partir du potentiel

électromagnétique  $(\vec{A}, V)$  par la relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

En coordonnées sphériques,  $\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$ . Les trois coordonnées de

$\vec{E}$  sont ainsi :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t}$      $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t}$     et     $E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial t}$ .

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{rc} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \cos \theta}{4\pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$E_r = -\frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r^2 c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc^2} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{2}{r^3} p \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^2 c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) - \left( \frac{\mu_0 \cos \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$E_r = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{r^2 c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{rc^2} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{2}{r^3} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{rc^2} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

Soit finalement 
$$E_r = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{r^2 c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{2}{r^3} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{rc} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\sin \theta}{rc} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\sin \theta}{r^2} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) + \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

Et au final 
$$E_\theta = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{rc^2} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^2 c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^3} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \right).$$

$E_\varphi = 0$  car  $V$  indépendant de  $\varphi$  et  $A_\varphi$  est nulle.

On retrouve le champ électrique créé par un dipôle électrostatique

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$  auquel s'ajoutent en régime variable des termes en  $1/r$  et

$1/r^2$ . Par ailleurs, on peut remarquer que les champs électrique et magnétique créés par le dipôle oscillant sont orthogonaux.

### III.3 Champ électromagnétique d'un dipôle sinusoïdal.

Dans de nombreuses situations, le moment dipolaire présente une variation temporelle sinusoïdale. Dans la pratique, pour déterminer le champ électromagnétique émis dans ce cas, il est alors plus simple de faire tous les calculs en utilisant dès les premiers calculs l'expression de  $p(t)$  en

représentation complexe :  $\vec{p}(t) = \underline{p}(t) \vec{e}_z$  avec  $\underline{p}(t) = \underline{p}_0 \exp i\omega t$  soit  $\underline{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \underline{p}_0 \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ .

A partir de ces écritures, on détermine  $\dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = i\omega \underline{p}_0 \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$  soit  $\dot{\underline{p}} = i\omega \underline{p}$  si on pose

$\underline{p} = \underline{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$  pour alléger les écritures. De même,  $\ddot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \ddot{\underline{p}} = -\omega^2 \underline{p}$ .

En reportant  $\dot{\underline{p}} = i\omega \underline{p}$  et  $\ddot{\underline{p}} = -\omega^2 \underline{p}$  dans les expressions obtenues précédemment, on obtient :

$$\vec{B}(M, t) = \underline{B}_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \left( -\frac{\omega}{c} + \frac{i}{r} \right) \omega \underline{p} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(M, t) = \underline{E}_r \vec{e}_r + \underline{E}_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \underline{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^2} \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \underline{p}$$

$$\text{et} \quad \underline{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \left( \frac{-\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) \underline{p}.$$

### III.4 Champ électromagnétique à grande distance.

On s'intéresse généralement au champ rayonné à « grande distance ». La zone de rayonnement d'un émetteur est ainsi définie comme la région de l'espace située à une distance grande devant la longueur d'onde, soit  $r \gg \lambda$ . Cette zone de rayonnement correspond aux conditions courantes de réception des ondes en optique ( $\lambda \approx 500 \text{ nm}$ ) et des ondes radios ( $\lambda \approx 1 \text{ m}$ ). Toutefois, en ce qui concerne les ondes radios de la bande grandes ondes, ( $\lambda \approx 1 \text{ km}$ ), les récepteurs situés au voisinage de l'émetteur ne se trouvent pas dans la zone de rayonnement.

La condition  $r \gg \lambda$ , soit  $r \gg \frac{2\pi c}{\omega}$  correspond typiquement à  $r \gg \frac{c}{\omega}$  soit également  $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$ .

Dans cette condition, on peut négliger dans la parenthèse de l'expression de  $\underline{B}_\varphi$  le terme en  $1/r$  par

rapport au terme  $\omega/c$ . On peut donc écrire  $\underline{B}_\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\omega^2}{c} \underline{p}$ . Or,  $\ddot{\underline{p}} = -\omega^2 \underline{p}$ , on obtient

finalement  $\underline{B}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\ddot{\underline{p}}}{c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\ddot{\underline{p}}}{c^3}$ .

Dans l'expression de  $\underline{E}_\theta$  : à partir de  $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$ , on tire  $\frac{\omega}{rc} \ll \frac{\omega^2}{c^2}$  et  $\frac{1}{r^2} \ll \frac{\omega^2}{c^2}$ , les termes en  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r^2}$  dans la parenthèse peuvent être négligés.

$\underline{E}_\theta$  devient  $\underline{E}_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\omega^2}{c^2} \underline{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\ddot{\underline{p}}}{c^2}$ . Cette composante présente alors uniquement une dépendance en  $\frac{1}{r}$ .

Dans  $\underline{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^2} \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \underline{p}$ , les deux termes décroissent en  $\frac{1}{r^2}$  et  $\frac{1}{r^3}$ . Faisons apparaître le produit  $\frac{\omega^2}{rc^2}$  présent dans  $\underline{E}_\theta$  :  $\underline{E}_r = \frac{2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^2} \left( \frac{c}{\omega r} + \frac{c^2}{\omega^2 r^2} \right) \underline{p}$ . Les deux termes dans la parenthèse sont négligeables,  $\underline{E}_r \ll \underline{E}_\theta$ , on considère donc  $\underline{E}_r \approx 0$ .

En conclusion, à grande distance, pour  $r \gg \lambda$ , le champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{\underline{E}}(M, t) = \underline{E}_\theta \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\ddot{\underline{p}}}{c^2} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{\underline{B}}(M, t) = \underline{B}_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\ddot{\underline{p}}}{c} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\ddot{\underline{p}}}{c^3} \vec{e}_\varphi.$$

Le champ électromagnétique est proportionnel à la dérivée seconde du moment dipolaire ce qui montre que les charges accélérées rayonnent une onde électromagnétique. Contrairement au champ créé par un dipôle électrostatique, qui décroît en  $1/r^3$ , le champ électromagnétique ( $\vec{\underline{E}}$ ,  $\vec{\underline{B}}$ ) produit à grande distance par le dipôle oscillant varie comme  $1/r$ . Cette dépendance en  $1/r$  (au lieu du facteur  $1/r^2$  des champs statiques pour une distribution d'extension finie) permet la détection de signaux émis à des distances nettement plus importantes.

L'amplitude du champ électromagnétique est proportionnelle à  $\sin\theta$ , le rayonnement est donc nul sur l'axe du dipôle et maximum dans le plan équatorial. Enfin, on remarque que  $\underline{B}_\varphi = \frac{E_\theta}{c}$

Comme  $\ddot{\underline{p}} = -\omega^2 \underline{p} = -\omega^2 \underline{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \ddot{\underline{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)$ , la dépendance spatio-temporelle en  $\left( t - \frac{r}{c} \right)$  montre que le champ électromagnétique se propage à la vitesse  $c$  dans la direction et le sens du vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ . Les champs  $\vec{\underline{E}}$  et  $\vec{\underline{B}}$  sont orthogonaux entre eux et sont également tous les deux orthogonaux à la direction de propagation. Par ailleurs,  $\vec{e}_r \wedge \vec{\underline{E}} = \vec{e}_r \wedge \underline{E}_\theta \vec{e}_\theta = c \underline{B}_\varphi \vec{e}_\varphi = c \vec{\underline{B}}$ , on

retrouve la relation  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$  caractéristique d'une onde plane progressive dans le vide se propageant parallèlement à  $\vec{u} = \vec{e}_r$ . Toutefois, cette identification avec une OPP n'est que locale car ce n'est que localement et loin des sources que le vecteur unitaire  $\vec{u} = \vec{e}_r$  peut être considéré comme fixe.

#### IV PUISSANCE RAYONNEE PAR UN DIPOLE OSCILLANT.

Comme pour tout champ électromagnétique, le vecteur de Poynting peut être déterminé par la relation  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ . Toutefois, on se limite généralement à la détermination de la puissance

moyenne rayonnée par le dipôle, on détermine donc ici directement  $\langle \vec{R} \rangle$  en utilisant la notation complexe  $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$ .

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}^* = B_\phi^* \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left( -\frac{\omega}{c} + \frac{i}{r} \right) \omega \underline{p}^* \vec{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \wedge \vec{B}^* &= -E_r B_\phi^* \vec{e}_\theta + E_\theta B_\phi^* \vec{e}_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^3} \left( -i \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega}{rc} + \frac{\omega}{rc} - \frac{i}{r^2} \right) \omega |\underline{p}|^2 \vec{e}_\theta + \\ &\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left( \frac{\omega^3}{c^3} - i \frac{\omega^2}{rc^2} - \frac{\omega}{r^2 c} + i \frac{\omega^2}{rc^2} + \frac{\omega}{r^2 c} - \frac{i}{r^3} \right) \omega |\underline{p}|^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\omega^3}{c^3} \omega |\underline{p}|^2 \vec{e}_r. \quad \text{Avec } \underline{p} = \underline{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \underline{p}_0 \exp i\omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad |\underline{p}| = |\underline{p}_0|. \quad \text{On}$$

note  $|\underline{p}_0| = p_0$  de sorte que  $|\underline{p}|^2 = p_0^2$ , on obtient finalement :  $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2 c^3} \omega^4 p_0^2 \vec{e}_r$ .

L'expression de  $\langle \vec{R} \rangle$  reste la même en tout point de l'espace (dans le cadre de l'approximation dipolaire  $r \gg d$ ). On peut l'obtenir plus rapidement en limitant le calcul à la zone de rayonnement.

On remarque que  $\langle \vec{R} \rangle$  est radial même près du dipôle.  $\langle \vec{R} \rangle$  est fonction de  $\theta$  : la puissance n'est pas émise de manière isotrope. Le rayonnement est nul suivant l'axe du dipôle et est maximal dans le plan équatorial.

La puissance moyenne à travers une sphère de rayon  $r$  centrée en  $O$  correspond à la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle car on intègre sur toutes les directions de l'espace :

$$\langle P \rangle = \oint_{\text{sphère } r} \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}.$$

$$\text{Comme } d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r, \quad \langle P \rangle = \oint_{\text{sphère } r} \frac{1}{32 \pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2 c^3} \omega^4 p_0^2 \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\text{Soit } \langle P \rangle = \frac{1}{32 \pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\text{avec } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^\pi = \frac{4}{3}, \quad \text{on}$$

$$\text{obtient finalement : } \langle P \rangle = \frac{1}{32 \pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{12 \pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}.$$

La puissance moyenne totale  $\langle P \rangle$  est indépendante du rayon  $r$  de la sphère, c'est une caractéristique du dipôle émetteur. La décroissance des champs en  $1/r$  n'est pas liée à un phénomène d'absorption mais à la répartition de la puissance sur une surface qui croît comme  $r^2$ .

Considérons le cas où une seule charge  $q$  est mobile, la dérivée seconde du moment dipolaire  $\vec{p} = q \vec{OP}$  fait apparaître l'accélération  $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2}$  de cette charge :  $\ddot{\vec{p}} = q \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = q \vec{a}$  puis  $\ddot{p}^2 = q^2 a^2$ .

Par ailleurs, pour le dipôle oscillant sinusoïdalement, nous avons écrit  $\underline{\ddot{p}} = -\omega^2 \underline{p}$ , avec  $\underline{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \underline{p}_0 \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ , il vient  $\underline{\ddot{p}} = -\omega^2 \underline{p}_0 \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ . En utilisant la méthode

« complexe », on peut calculer simplement la valeur moyenne  $\langle \ddot{p}^2 \rangle$  :  $\langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\ddot{p}} \cdot \underline{\ddot{p}}^*) = \frac{1}{2} \omega^4 p_0^2$

car  $|\underline{p}_0|^2 = p_0^2$ ). Il vient ainsi  $\omega^4 p_0^2 = 2 \langle \ddot{p}^2 \rangle = 2 \langle q^2 a^2 \rangle = 2 q^2 \langle a^2 \rangle$ , expression que l'on peut

reporter dans  $\langle P \rangle$  :  $\langle P \rangle = \frac{1}{6 \pi \epsilon_0} \frac{q^2 \langle a^2 \rangle}{c^3}$ . On retrouve la formule de Larmor pour une particule non

relativiste : la puissance électromagnétique rayonnée par une particule chargée est proportionnelle à la moyenne du carré de son accélération et au carré de sa charge.

## V APPLICATION : NOTION SUR LA DIFFUSION DU RAYONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE.

Un gaz constitué d'atomes ou de molécules traversé par un faisceau de lumière réémet une fraction de la lumière reçue dans toutes les directions de l'espace : on dit que la lumière est diffusée.

Le mécanisme proposé est le suivant : le champ électrique d'une onde électromagnétique interagit avec les atomes ou molécules qui absorbent une partie de l'énergie du rayonnement incident, les dipôles électriques induits rayonnent à leur tour des ondes électromagnétiques dans toutes les directions.

On se propose ici d'utiliser le modèle phénoménologique dit « modèle de l'électron élastiquement lié » pour étudier, dans le cadre de la mécanique classique, l'interaction entre un atome et le champ d'une onde électromagnétique incidente.

### V.1 Modèle de l'électron élastique lié

Comme précédemment, on néglige l'action du champ électromagnétique sur le noyau. Par ailleurs, en supposant les électrons non relativistes, on néglige l'action du champ magnétique devant celle du champ électrique. Enfin, on admet que la longueur d'onde du rayonnement considéré est grande devant la dimension caractéristique de l'atome de sorte qu'on puisse considérer le champ électrique uniforme à l'échelle du déplacement des électrons. L'action de l'onde électromagnétique sinusoïdale est donc décrite par celle de son champ électrique de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ .

On suppose que les différents électrons peuvent être traités indépendamment et que chaque électron se comporte comme un oscillateur harmonique amorti. On note  $\vec{r} = \vec{OP}$  le vecteur position de l'électron étudié. Cet électron est soumis à une force élastique de rappel de la forme  $\vec{F}_{\text{rappel}} = -k \vec{r}$  exercée par les autres charges de l'atome et à une force externe  $\vec{F}_e = q_e \vec{E} = -e \vec{E}$ . Il est en outre soumis à une autre force de type frottement fluide proportionnelle à la vitesse  $\vec{f} = -f \dot{\vec{r}}$  qui rend compte de manière phénoménologique des diverses causes d'amortissement (en particulier la dissipation d'énergie par rayonnement...). L'équation du mouvement de l'électron s'écrit alors :

$$m \ddot{\vec{r}} = -k \vec{r} - f \dot{\vec{r}} - e \vec{E}.$$

Pour un champ extérieur appliqué sinusoïdal, on utilise la représentation complexe  $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp i \omega t$ .

En posant  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\gamma = \frac{f}{m}$ , l'équation du mouvement devient  $\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} - \gamma \dot{\vec{r}} - \frac{e}{m} \vec{E}_0 \exp i \omega t$ . En

cherchant une solution en régime établi de la forme  $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp i\omega t$ , on obtient

$$\vec{r} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 \exp i\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.$$

Le moment dipolaire associé au déplacement de cet électron est  $\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}_0 \exp i\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ . Sous

l'action d'un champ extérieur sinusoïdal, le mouvement de l'électron est responsable d'un moment dipolaire sinusoïdal qui rayonnera une onde électromagnétique.

## V.2 Diffusion de Rayleigh

La diffusion de Rayleigh concerne la diffusion de la lumière solaire par les molécules de l'atmosphère. Traversée par le rayonnement solaire, l'atmosphère devient une distribution dipolaire rayonnante. Chaque molécule est, dans une approche très grossière, modélisable par un atome à un électron élastiquement lié.

Les pulsations propres mises en jeu sont situées dans l'ultra-violet lointain ( $\omega_0 \approx 10^{18} \text{ rad.s}^{-1}$ ). La lumière du spectre visible correspond donc à des pulsations  $\omega$  ( $\omega \approx 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ) très inférieures aux pulsations caractéristiques  $\omega_0$  (soit  $\omega \ll \omega_0$ ). Par ailleurs, l'amortissement est généralement faible.

Avec ces hypothèses, le moment dipolaire obtenu par le modèle à un électron devient

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_0 \exp i\omega t, \text{ son amplitude } p_0 = |\underline{p}_0| = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E_0 \text{ est indépendante de } \omega.$$

La puissance moyenne rayonnée par le dipôle  $\langle P \rangle = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{e^4 \omega^4 E_0^2}{m c^3 \omega_0^4}$  est par

conséquent proportionnelle à  $\omega^4$ . L'intensité diffusée varie donc comme  $\frac{1}{\lambda^4}$ . L'atmosphère réémet

préférentiellement les plus courtes longueurs d'onde du spectre visible : le violet et le bleu. Ainsi, lorsqu'on regarde le ciel dans une direction différente du Soleil, nous percevons la diffusion atmosphérique de la lumière du soleil : le ciel est bleu.

Lorsque nous observons la lumière en provenance directe du Soleil, nous percevons une lumière blanche appauvrie dans le domaine bleu-violet. Au lever et au coucher du soleil, la lumière traverse une plus grande épaisseur d'atmosphère, le soleil a un aspect nettement plus rouge car la lumière qui n'est pas diffusée est transmise, il s'agit des grandes longueurs d'onde : l'orange et le rouge.

### V.3 Polarisation par diffusion.

La lumière naturelle n'est pas polarisée. Par conséquent, une onde lumineuse se propageant dans une direction donnée, (Oz) à titre d'exemple, induit des dipôles qui, comme le champ électrique incident, oscillent de façon aléatoire dans toutes les directions d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Toutefois, l'onde incidente peut être décrite comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement suivant les directions (Ox) et (Oy) mais présentant entre elles un déphasage aléatoire. Ces deux ondes induisent des moments dipolaires de la forme  $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$  et  $\vec{p}_2 = p_2 \vec{e}_y$  oscillants.

Observons l'onde émise par ces deux dipôles situés en O en un point de l'axe (Ox). Le dipôle  $\vec{p}_1$  ne rayonne pas car  $\vec{p}_1$  selon  $\vec{e}_x$  ( $\vec{E}_1 = \vec{0}$ ), par contre, le rayonnement de  $\vec{p}_2$  est maximal car le point d'observation se trouve dans le plan équatorial. Le champ  $\vec{E}_2$  engendré est parallèle au vecteur  $\vec{e}_\theta$  correspondant donc colinéaire à  $\vec{e}_y$  (dans le plan équatorial du moment  $\vec{p}$ ,  $\vec{e}_\theta$  est de sens opposé à  $\vec{p}$ ). Au total, le champ électrique de l'onde diffusée est donc polarisé rectilignement dans la direction orthogonale à la fois à la direction de l'atome « diffuseur » (ici (Ox)) et à la direction de propagation de l'onde incidente (ici (Oz)).

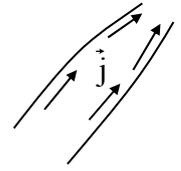
De même, on peut montrer qu'un observateur sur l'axe (O,y) voit uniquement  $\vec{p}_1$  rayonner un champ  $\vec{E}_1$  selon  $\vec{e}_x$ .

Ainsi, la diffusion de la lumière solaire permet d'obtenir dans des directions privilégiées une onde polarisée rectilignement.

## VI ANNEXES.

### VI.1 Annexe 1 : ARQS – Loi des noeuds

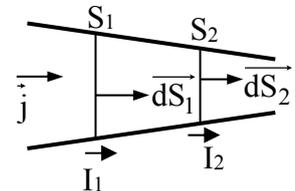
Considérons dans un premier temps les régimes stationnaires (ou permanents) et le cas simple d'un conducteur filiforme. Les porteurs ne peuvent sortir du matériau conducteur, l'intensité  $dI$  qui traverse un élément de surface latérale est donc nulle  $dI = \vec{j} \cdot \vec{dS}_{lat} = 0$ . Les lignes de courant (lignes tangentes à  $\vec{j}$ ) sont donc tangentes à



la surface du conducteur, le fil conducteur constitue en fait un tube de courant. Si maintenant on utilise le caractère conservatif du flux de  $\vec{j}$ , on montre tout simplement que l'intensité électrique

$I = \frac{dQ_m}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$  est la même pour toute section  $S$  du fil conducteur.

En effet, considérons deux sections d'un tube conducteur. Le courant  $I_1$  traversant la section  $S_1$  est  $I_1 = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS}_1$  alors que pour la section  $S_2$



$I_2 = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS}_2$ . Dans ces définitions de  $I$ , les deux vecteurs  $\vec{dS}$  dans le

sens choisi pour orienter le circuit. Considérons maintenant la surface fermée constituée par  $S_1$ ,  $S_2$  et la surface latérale.  $\Phi_{fermée} = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{lat}} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\tau} \text{div } \vec{j} d\tau = 0$  car  $\text{div } \vec{j} = 0$ .

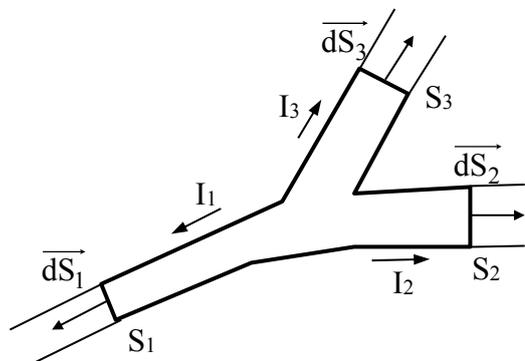
Pour la surface fermée  $\vec{dS}$ , orientée vers l'extérieur, est de sens opposé à  $\vec{dS}_1$ , il suit  $\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS}_1 = -I_1$  alors que  $\iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} = I_2$ . Avec  $\iint_{S_{lat}} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$ , on en déduit  $I_1 = I_2$ .

C'est cette même propriété qui permet d'établir la loi des noeuds.

$\oiint_{S_{fermée}} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0 = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_3} \vec{j} \cdot \vec{dS}$  soit

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Il reste que la conservation du flux de  $\vec{j}$  n'est, à priori, plus valide en régime variable. La loi des noeuds, en



particulier, ne peut donc plus être appliquée ! Toutefois, cette loi continue d'être utilisée en électrocinétique lors de l'étude des circuits RLC par exemple. On se place en fait lors de ces études dans l'approximation des régimes stationnaires, i.e. on admet que la dépendance des grandeurs vis à vis du temps est suffisamment lente pour pouvoir raisonner comme si le régime était permanent.

## VI.2 Annexe 2 : le dipole électrostatique et l'approximation dipolaire

### POTENTIEL D'UN DIPOLE.

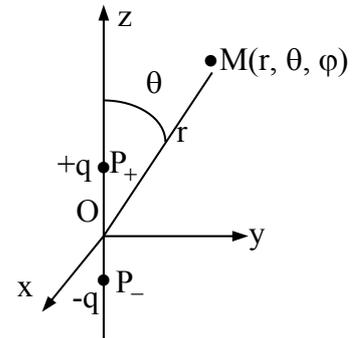
Un dipôle est constitué de deux charges ponctuelles opposées (+q, -q) ( $q > 0$ ) placées respectivement en  $P_+$  et  $P_-$  et très proches l'une de l'autre ; ceci sous-entend que nous étudierons l'effet de ce dipôle à des distances très grandes vis à vis de leur écartement  $d = P_-P_+$ .

On appelle moment du dipôle (ou moment dipolaire) le vecteur défini par  $\vec{p} = q \overrightarrow{P_-P_+}$ .

On considère un doublet est centré en O, origine du repère, et orienté selon l'axe (O, z) :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{P_-P_+} = q d \vec{u}_z = p \vec{u}_z \quad \text{où } d = \|\overrightarrow{P_-P_+}\|.$$

L'étude consiste d'abord à calculer le potentiel créé par ce doublet de charges en un point M éloigné du dipôle ( $OM \gg d$ ). Elle est réalisée en coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \varphi)$ .



Le potentiel en M est du aux deux charges ponctuelles : +q en  $P_+$  et -q en  $P_- \Rightarrow$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 P_+M} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 P_-M} \quad (\text{la référence de potentiel est choisie nulle à l'infini}) \quad \text{où}$$

$$P_+M = \|\overrightarrow{P_+M}\| \quad \text{et} \quad P_-M = \|\overrightarrow{P_-M}\|.$$

Le point M étant éloigné du doublet, on effectue, après avoir exprimé  $P_+M$  et  $P_-M$  en fonction de  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  et  $\frac{d}{r}$ , un développement limité au premier ordre. On montre ainsi que

$$V(M) \approx \frac{q d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (p = \|\vec{p}\| = q d). \quad \text{Comme } \vec{p} = p \vec{u}_z \quad \text{soit } \vec{p} = p (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta),$$

$$p \cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{u}_r = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r}. \quad \text{Le potentiel créé par le dipôle peut s'écrire } V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Le champ  $\vec{E}(M)$  se déduit du potentiel  $V(M)$  par la relation :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . En utilisant l'expression

$$\text{du gradient en coordonnées sphériques, on obtient } \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta).$$

### APPROXIMATION DIPOLAIRE POUR UNE DISTRIBUTION QUELCONQUE.

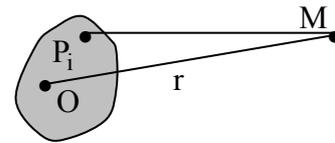
On cherche ici à caractériser l'effet d'une distribution de charge plutôt complexe (une molécule constituée de quelques noyaux positifs et d'un grand nombre d'électrons par exemple...) en des lieux éloignés, c'est-à-dire loin par rapport aux dimensions de « l'objet » lui-même. On considère notre distribution comme une assemblée de charges ponctuelles  $q_i$  disposées en des points  $P_i$  dans une région limitée de l'espace et on choisit une origine  $O$  quelque part dans le volume rassemblant les charges.  $OP_i = \|\overrightarrow{OP_i}\|$  est ainsi la distance entre les charges  $q_i$  et notre origine  $O$ .

Pour déterminer le champ électrique en des points distants, on commence par calculer le potentiel de la distribution en un point  $M$  très éloigné de la distribution, à savoir que pour toute charge  $q_i$   $OM = \|\overrightarrow{OM}\| \gg OP_i$ . Le potentiel créé par la distribution de charges ponctuelles est par définition

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{P_iM} \text{ avec la convention } V(\infty) = 0.$$

Si on suppose dans une première approche que, comme la distance des charges  $q_i$  au point  $M$  est très grande, on peut remplacer chaque distance  $P_iM$  par la distance de  $M$  à l'origine  $O$ , i.e.  $P_iM = OM = r$ . Chaque terme devient égal

$$\text{à } \frac{q_i}{P_iM} = \frac{q_i}{r}.$$



Le potentiel  $V(M)$  devient  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_i q_i$ . Si on note  $Q = \sum_i q_i$ , charge totale de la distribution. Le potentiel  $V(M)$  prend l'écriture simple du potentiel d'une charge ponctuelle en  $O$  :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Pour des points suffisamment loin d'une distribution, celle-ci se comporte comme une charge ponctuelle. Toutefois, si la charge totale de la distribution est nulle, notre modèle simple conduit à  $V(M) = 0$  en tout  $M$  éloigné de la distribution. Le modèle utilisé est trop simpliste et il faut donc affiner notre description : on ne doit plus écrire  $P_iM = OM$  pour toute charge  $q_i$  en  $P_i$ .

Partant de  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{P_iM}$ , écrivons maintenant  $\overrightarrow{P_iM} = \overrightarrow{P_iO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_i}$  soit

$$\|\overrightarrow{P_iM}\| = \sqrt{OM^2 + OP_i^2 - 2\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OM}} \Rightarrow P_iM = \|\overrightarrow{P_iM}\| = OM \sqrt{1 + \frac{OP_i^2}{OM^2} - 2\frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2}}.$$

Posons  $OM = r$

$$\frac{1}{P_i M} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{OP_i^2}{r^2} - 2 \frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^2} \right)^{-1/2}.$$

En utilisant un développement limité du 1<sup>o</sup> ordre,  $\frac{1}{P_i M} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{OP_i^2}{r^2} + \frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^2} \right)$ .

Il suit  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{OP_i^2}{r^3}$ .

Le premier terme est similaire à celui que nous avons obtenu précédemment, i.e. décroissance en  $1/r$  comme pour une charge ponctuelle. Le second terme est, en fait, en  $1/r^2$   $\left( \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3} = \frac{\vec{u}_r}{r^2} \right)$  comme pour un dipôle. Ainsi, le potentiel apparaît comme une série en puissance de  $1/r$ . Son comportement à grande distance sera dominé par le premier terme de cette série dont le coefficient n'est pas nul.

Si l'un des deux premiers termes est non nul, le troisième terme, en  $1/r^3$  est alors très négligeable à grande distance. Plaçons-nous dans cette condition.

On peut alors écrire  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^3}$

soit  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left( \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{r^3}$  ( $r^3$  et  $\overrightarrow{OM}$  étant des constantes pour chaque charge  $q_i$ ).

Distinguons maintenant deux cas :

1)  $\sum_i q_i = Q \neq 0$ , le point origine O est un point quelconque de la distribution, on peut donc le

choisir au barycentre des charges. Ainsi  $\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \vec{0}$ . Il reste alors  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ .

On retrouve le cas où la distribution se comporte à grande distance comme une charge ponctuelle placée en O, barycentre de la distribution (nous avons négligé les termes en  $1/r^3$ !).

2)  $\sum_i q_i = 0$  : la charge totale du système est nulle. C'est par exemple le cas d'une molécule neutre.

On retrouve pour  $V(M)$  une expression proche de celle d'un dipôle, ici

$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}\right) \cdot \overrightarrow{OM}}{r^3}$  alors que pour un dipôle de moment  $\vec{p}$ , nous avons montré que

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (\vec{r} = \overrightarrow{OM}). \text{ Il suffit alors, à priori, de poser } \vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Examinons la signification physique de  $\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$ . La charge totale est nulle,  $\sum_i q_i$  peut donc être

divisée en deux groupes : les charges positives  $\sum_j q_j = q$  et les charges négatives  $\sum_k q_k = -q$ .

$$\sum_i q_i = \sum_j q_j + \sum_k q_k = +q - q = 0. \text{ Par suite } \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_j q_j \overrightarrow{OP_j} + \sum_k q_k \overrightarrow{OP_k}.$$

Soit  $P_+$  le barycentre des charges positives :  $\sum_j q_j \overrightarrow{OP_j} = \left(\sum_j q_j\right) \overrightarrow{OP_+} = q \overrightarrow{OP_+}$  et  $P_-$  le barycentre

des charges négatives :  $\sum_k q_k \overrightarrow{OP_k} = \left(\sum_k q_k\right) \overrightarrow{OP_-} = -q \overrightarrow{OP_-}$ .

Il suit  $\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = q \overrightarrow{OP_+} - q \overrightarrow{OP_-} = q \overrightarrow{P_-P_+}$ .

On retrouve le moment dipolaire d'un doublet de charges ponctuelles localisées ici aux barycentres des charges positives et négatives ce qui justifie la définition d'un moment dipolaire  $\vec{p}$  pour une distribution de particules chargées dont la charge totale nulle.

Notons que dans le cas simple d'un doublet de charges opposées, on retrouve immédiatement le moment d'un dipôle.

On définit donc le moment dipolaire d'une distribution globalement neutre par  $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$  où  $O$

est un point quelconque de la distribution. La définition du moment dipolaire est indépendante de

l'origine choisie. En effet, considérons le moment  $\vec{p}'$  défini par  $\vec{p}' = \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i}$ .

$$\vec{p}' = \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i} = \sum_i q_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) = \sum_i q_i \overrightarrow{O'O} + \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{O'O} \sum_i q_i + \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Or  $\sum_i q_i = 0 \Rightarrow \vec{p}' = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \vec{p}$ .

Le moment dipolaire est bien indépendant de l'origine choisie.

Le potentiel d'une distribution globalement neutre et de moment dipolaire  $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$  est donc

celui d'un dipôle  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^3}$ . On conçoit ici l'intérêt pratique de la notion de dipôle

électrostatique alors que le cas simple d'une paire de charges ponctuelles est tout à fait rare.

Cette situation correspond au cas de nombreuses molécules globalement neutres pour lesquelles les barycentres des charges négatives et positives ne coïncident pas. Toutefois, pour certaines molécules (ex  $\text{CO}_2$ ), le moment dipolaire disparaît à cause de la symétrie de la molécule. Pour celles-ci, il est nécessaire d'étendre le développement du potentiel, i.e. d'intégrer le terme en  $1/r^3$  (terme quadrupolaire).

Remarque : de la même manière, nous définirons le moment dipolaire d'une distribution volumique de charges par  $\vec{p} = \iiint_{\tau} \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau$ .